ORSAY
Série A
N° d'ordre 143

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Eduardo de RAFAEL

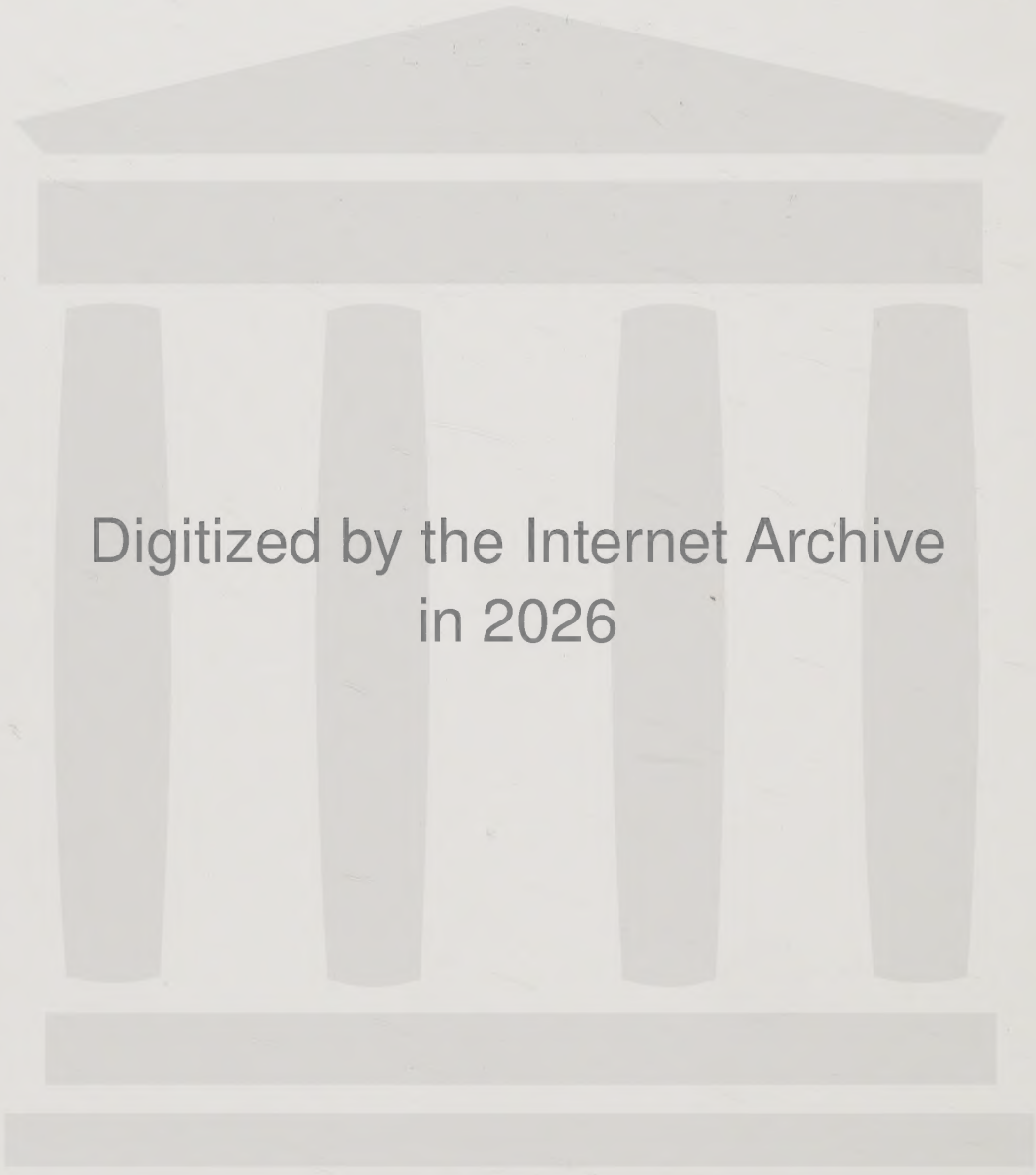
1re THÈSE : THEORIE RELATIVISTE DES CORRELATIONS ANGULAIRES
et Application à l'Analyse Phénoménologique des Particules et Résonances

2e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 29 Mars 1966 devant la Commission d'examen

MM. A. LAGARRIGUE Président

F. LURÇAT, L. MICHEL } Examinateurs


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546822_0031

ORSAY
Série A
N° d'ordre 143

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Eduardo de RAFAEL

1re THÈSE : THEORIE RELATIVISTE DES CORRELATIONS ANGULAIRES
et Application à l'Analyse Phénoménologique des Particules et Résonances

2e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 29 Mars 1966 devant la Commission d'examen

MM. A. LAGARRIGUE Président

F. LURÇAT, L. MICHEL } Examinateurs

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

- PROFESSEURS -

Doyen M. ZAMANSKY

BRELOT	T analyse supérieure
PRENANT	T anatomie et histologie comparée
GRASSE	T évolution des êtres organisés
PREVOST	T chimie organique
WYART	T minéralogie et cristallog.
TEISSIER	T zoologie
MANGENOT	T biologie végétale (Orsay)
AUGER	T physique quantique et relativité
MONNIER	T physiologie générale
PIVETEAU	T paléontologie
ROCARD	T physique (ENS)
CARTAN	T mathématiques (ENS)
LAFFITTE	T chimie générale
N...	T géométrie supérieure
COULOMB	T physique du globe
Mlle COUSIN	T biologie animale SPCN
CHRETIEN	T chimie minérale
BOCQUET	T zoologie
KASTLER	T physique(ENS)
EPHRUSSI	T génétique
RIVIERE	T géologie SPCN et sédimento. (Orsay)
GAUTHERET	T biologie végétale PCB
LUCAS R.	T recherches physiques
THOMAS A.	T biologie cellulaire
ARNULF	T optique appliquée
MORAND	T physique enseignement
SOLEILLET	T physique PCB
FORTIER	T mécanique expérimentale des fluides
DRACH	T zoologie
QUENEY	T météorologie et dynamique atmosph.
GALLIEN	T embryologie
EICHHORN	T botanique
DE CUGNAC	T biologie végétale SPCN
Mlle CAUCHOIS	T chimie physique
THELLIER	T physique du globe
L'HERITIER	T biologie générale (Orsay)
GRIVET	T radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T mécanique générale
DUBREIL	T arithm. et théorie des nombres
CHAMPETIER	T chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T micropaléontologie
JUNG	T géologie
TRILLAT	T microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T chimie organique et structurale
JACQUINOT	T spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T théories physiques
AMIEL	T chimie générale
HOCART	T minéralogie et cristallographie
MATHIEU J.P.	T physique optique
COUTEAUX	T cytologie
MAY	T zoologie
CHOQUET	T théorie des fonctions et topologie
FELDMANN	T biologie végétale marine
GUINIER	T physique des solides (Orsay)
JOST	T physiologie comparée
FORTET	T calcul des probabilités et phy. math.
SCHWARTZ	T calcul dif. et intégral
CHOUARD	T physiologie végétale
MALAVARD	T aviation (techn. aéron.)
NORMANT	T synthèse organique
BENARD	T chimie minérale
BUVAT	T botanique (ENS)
DUGUE	T statistiques mathématiques
SOULAIRAC	T psychophysiologie
ULRICH	T physiologie végétale appl.
MARECHAL	T optique théor. et appl.
KIRRMANN	T théories chimiques
CHADEFAUD	T botanique
Mlle LE BRETON	T physiologie de la nutrit.
LELONG	T application de l'analyse à la géom.
DEVILLERS	T anatomie et histologie comparée
EHRESMANN	T topologie algébrique
FRANCON	T physique SPCN
GLANGEAUD	T géographie phys. et géologie dynam.
DODEMENT	T mathématiques MGP
PISOT	T techniques mathématiques de la phys.
QUELET	T chimie organique
CAGNIARD	T géophysique appliquée
LENNUIER	T physique MGP
RIZET	T génétique (Orsay)
ROUTHIER	T géologie appliquée
Mme TONNELAT	T physique théorique
DIXMIER	T mathématiques MPC
SOUCHAY	T chimie générale
AIGRAIN	T électrotechnique générale
BRUSSET	T chimie systématique
LEVY M.	T physique théorique et htes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T chimie biologique
Mme HUREL PY	T biologie végétale PCB
PANNETIER	T chimie générale
BRUN	T mécanique des fluides I
LEDERER	T chimie biologique (Orsay)
Mme DUBREIL	T mathématiques (agrégat)
Mme LELONG	T mathématiques II (ENS)
BELLAIR	T géologie SPCN
COTTE	T physique électricité
DUBOIS J.E.	T chimie organique
LAMOTTE	T zoologie (ENS)
MICHEL A.	T chimie minérale (Orsay)
OLMER	T énergétique générale
ROUAULT	T électricité (Orsay)
GAUTHIER	T mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T chimie physique
BROSSEL	T physique atomique
BUSER	T physiologie comparée
CAMUS	T physiologie végétale
CASTAING	T physique II thermodynamique (Orsay)
CURIEN	T minéralogie et cristallographie
MOYSE	T physiologie végétale (Orsay)
Mme CHARNIAUX-COTTON	T évolution des êtres organisés
POSSOMPES	T zoologie
PULLMANN	T chimie quantique
TEILLAC	T physique nucléaire et radioact. (Orsay)
TONNELAT	T biologie-physico-chimique (Orsay)
VILLE	T économétrie
WILLEMART	T chimie PCB
DODE	T chimie (Orsay)
FREYMANN	T recherches physiques
GUINOCHET	T biologie végétale SPCN (Orsay)
ROCH	T géologie
SCHATZMANN	T astrophysique
TERMIER	T géologie générale
ZAMANSKY	T mathématiques générales
LUCAS	T géologie
ALLARD	T chimie physique
BERTHELOT	T physique des particules fondamentales (Ors.)
BRICARD	T météorol. et physique de l'atmosphère (Ors.)
Mme ALBE FESSARD	T psycho-physiologie
FRIEDEL	T physique des solides (Orsay)
JULIA M.	T études des molécul. naturelles complexes
LENDER	T biologie animale SPCN (Orsay)
MAGAT	T physico-chimie des radio-éléments
Mlle QUINTIN	T électrochimie
MONOD	T chimie du métabolisme
BENOIT	T physiologie animale (Orsay)
DE POSSEL	T analyse numérique
CHARLOT	T chimie analytique
LEMEE	T écologie végétale (Orsay)
GUERIN	T chimie MPC (Orsay)
CHATELET	T chimie PCB
JEAN	T physique nucléaire (Orsay)
MATTLER	T physique SPCN
BERGERARD	T zoologie (Orsay)
BERTEIN	T électronique (Orsay)
BOUISSIERES	T radiochimie
Mme COUTURE	T thermodyn. et méca. phys.
ELLEMBERGER	T géologie des grandes régions du globe (Ors.)
FRANC	T biologie animale PCB
SCHNELL	botanique tropicale
STLKOWSKI	T physiologie végétale
ACHER	T chimie biologique
BAUDOIN	T biologie animale PCB
BEAUMONT	biologie animale SPCN
BLAMONT	géophysique ionosphère
BOUREAU	T botanique
CURIE D.	physique MGP
DURAND DELGA	T géologie
FREON	T chimie organique (Orsay)
HELLER	T physiologie végétale
TORTRAT	T calcul des probabilités
CAILLEUX	T géologie SPCN
MAGNAN	physique électricité
DAUDEL	T mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théor. et à la phys. nucléaire
ROLLET	T chimie minérale
Mlle JOSIEN	T chimie SPCN
CHEVALLEY	T géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T électronique (Orsay)
CHAPELLE	T physique I (Orsay)
DELANGE	T mathématiques I (Orsay)
DENY	T mathématiques générales (Orsay)
GERMAIN	T mécanique théorique des fluides
LACOMBE	T métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
BROCHARD	T physique MGP (Orsay)
CABANNES	T mécanique générale
LESIEUR	T mathématiques I (Orsay)
MAZET	T mécanique générale (Orsay)
CAIRE	géographie phys. et géol. dynamique
COMOLET	mécanique des fluides
CORABOEUF	T physiologie animale (Orsay)
DELLOUE	T physique de l'exosphère
GORENFLOT	botanique II (Orsay)
HOUILLON	biologie animale PCB
JULLIEN J.	chimie SPCN (Orsay)
MALGRANGE	T techniques math. de la phys. (Orsay)
OLIVIER	anthropologie
NOZERAN	T botanique II (Orsay)
BLANC LAPIERRE	T physique ENS (Orsay)
CHEVAUGEON	T botanique (Orsay)
KAHANE	T mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T mathématiques ENS féminine
KOURGANOFF	T astronomie (Orsay)
THIRY	T mécanique céleste
ABELES	physique SPCN
AMAT	T physique PCB
AUBOIN	T géologie
Mme BENOIST-GUEUTAL	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
BOUGIS	biologie marine Villefranche s/Mer
BRUHAT	T mathématiques MPC
BRUNN	T géologie historique (Orsay)
CHABBAL	T physique MGP (Orsay)
DEHEUVELS	T mathématiques propédeutique
D'ESPAGNAT	T physique théorique (Orsay)
FURON	T géologie SPCN
Mme GANS	T génétique
GENEVES	biologie végétale PCB
GUILBERT	physique CSU Orléans
HUPE	T pétrographie
HOLLANDE	T biologie générale
LIONS	T analyse numérique
MAITTE	T chimie PCB
MEYER	physique propédeutique
NICOLAS	géologie appliquée

PANIGEL		biologie générale
Mlle FOURCROY		biologie végétale SPCN
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	mécanique analytique et mécanique céleste
Mlle VEIL	T	physiologie générale
LWOFF	T	microbiologie
SIESTRUNCK	T	mécanique physique et expérimentale
NERON	T	mathématiques MPC (Orsay)
Mme PECKER-WIMEL	T	astrophysique
BALKANSKY		physique MPC
LE CORRE	T	électricité
DELCROIX	T	physique des milieux ionisés
GOURDIN		physique théorique et htes énergies (Ors.)
LEHMANN	T	physique expérimentale des htes énergies
NATAF	T	physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
ECHALIER		biologie animale PCB
BARRAUD		physiologie cellulaire
LIORET	T	physiologie végétale (Orsay)
DARS		géologie structurale et géologie appliquée
CAMEFORT	T	botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T	mécanique industrielle
BLAQUIERE		électronique (Orsay)
ARNOUS	T	physique théorique
TATIBOUET		chimie CSU Orléans
MALLIAVIN	T	mathématiques propédeutique (Orsay)
GAUDEMAR		chimie propédeutique
PEREZ Y JORBA		physique expérimentale des htes énergies (Ors.)
DAVID	T	chimie (agrégation Orsay)
BROUSSE	T	mécanique théorique
ROSCH	T	astronomie
GUY	T	physique expérimentale
LAZARD		mathématiques MPC
MOREL P.		physique MPC
ARSAC		programmation
LEFEBVRE		chimie MPC
CHAPEVILLE		biochimie
BENOIT		physique CPEM
RIO		chimie CPEM
JAUZEIN		géologie (ENS)
PREVOST G.		biologie végétale CPEM
FAVARD P.		biologie animale CPEM
VILKAS		chimie CPEM
Mlle FICINI		chimie CPEM
LEQUEUX		astronomie
COHEN TANNOUDJI		physique MPC
TAVERNIER		physique CPEM
Mme ROIZEN		physique CPEM
DURAND M.		biologie animale SPCN
RAVIER		pétrographie
ROSEAU	T	mécanique théorique des fluides
ROUBINE		électronique
SILBER	T	chimie PCB
UEBERSFELD	T	électronique
YVON	T	théories physiques
HERVE	T	mathématiques
JANCOVICI		physique atomique (Orsay)
FALK-VAIRANT		physique nucléaire (Orsay)
FETIZON		chimie propédeutique (Orsay)
CERF		mathématiques (Orsay)
PASCAUD		physiologie
Mme PETIT		biologie animale CPEM
BROUSSE		géologie (Orsay)
CAGNAC		physique agrégation (Orsay)
LEBERRE		zoologie (Orsay)
SCHAEFFER		microbiologie (Orsay)
DE GENNES		physique des solides (Orsay)
RIOU		physique nucléaire expérimentale (Orsay)
CLAUSER		chimie biologique (Orsay)
CHEVALIER		physiologie animale (Orsay)

Le secrétaire général : R. POULLAIN.

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

à Marie-Elaine.

R E M E R C I E M E N T S

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Directeur Léon Motchane de m'avoir accueilli à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, où j'ai profité d'une atmosphère des plus stimulantes.

Je dois à Monsieur Claude Colin, attaché culturel à l'ambassade de France en Espagne, mort récemment dans un accident tragique, de m'avoir encouragé à venir en France pour faire des recherches en physique théorique. Son cours à l'Université de Barcelone eut une influence décisive sur ma vocation pour la recherche.

Mes recherches sur le sujet de cette thèse ont été entreprises sous la direction de Monsieur le Professeur Louis Michel. Je suis très heureux de pouvoir lui exprimer ici toute ma reconnaissance pour la formation scientifique qu'il m'a donnée. Son amitié m'a été aussi précieuse que ses conseils et son intérêt pour mon travail.

Je remercie cordialement Monsieur le Professeur François Lurçat pour le vif intérêt qu'il m'a témoigné au cours de mes recherches.

Monsieur le professeur André Lagarrigue m'a fait l'honneur de participer à mon jury de thèse ; qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma gratitude.

Je veux aussi remercier mes camarades André Derem (qui a soigneusement corrigé le manuscrit de cette thèse), Claude Henri et Jean Kaplan, avec lesquels j'ai eu le plaisir et l'avantage de discuter maintes fois tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier encore tous les physiciens théoriciens et expérimentateurs avec lesquels j'ai eu le plaisir de discuter et d'échanger des idées et, très spécialement, ceux de l'I. H. E. S., du Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique et du Séminaire de Physique Théorique au Collège d'Espagne à Paris.

Le travail de reproduction a été fait par les soins du Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique ; je tiens à remercier les secrétaires de l'I. H. E. S. et du Centre de Physique Théorique qui ont eu la charge du "déchiffrage" de mon manuscrit, et tout particulièrement Madame Andalo pour le grand soin qu'elle a apporté à la dactylographie de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : Rappel de cinématique relativiste. Définitions et Notations. 9

1a. Espace-temps de Minkowski. 10
1b. Transformations de Lorentz. 12
1c. Transformation spinorielles. 15
1d. Remarques sur le groupe des rotations. 19
1e. Lois de transformation des états à une particule. 23

CHAPITRE II : Matrice densité de spin pour des particules de spin quelconque 31

2a. Paramétrisation multipolaire de la matrice densité 32
2b. Développement de la matrice densité sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles. Degré de polarisation 2^L-polaire. Degré de polarisation 35

PREMIERE PARTIE

CINEMATIQUE RELATIVISTE DES FONCTIONS DE VERTEX. APPLICATIONS 47

CHAPITRE III : Les règles de sélection dans un vertex. Applications 55

3a. Application du théorème de Bohr aux fonctions de vertex. (Invariance par parité). Enoncé 1. Exemples 57
3b. Invariance par renversement du mouvement. Enoncé 2. Exemples 62
3c. Eléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants pseudoscalaires et vectoriels ... 65
3d. Généralisation au cas d'un courant ayant la loi de transformation d'un champ de spin quelconque. Enoncé 3. Enoncé 4 69

Pages

CHAPITRE IV : Paramétrisation multipolaire des fonctions de vertex. Classification des facteurs de forme 73

4a. Cas d'un courant vectoriel ou axial. Description du vertex en termes de fonctions irréductibles 76
4b. Facteurs de forme. Paramétrisation multipolaire.. 82
4c. Règles de sélection pour les facteurs de forme .. 85
4d. Remarque concernant la conservation de l'opérateur densité de courant 90
4e. Exemples 92
4f. Généralisation au cas d'un courant correspondant à un champ de spin quelconque 96

D E U X I E M E P A R T I E

THEORIE RELATIVISTE DES CORRELATIONS ANGULAIRES DANS LES DESINTEGRATIONS SUCCESSIVES EN DEUX CORPS. APPLICATIONS. 107

CHAPITRE V : Description phénoménologique des désintegrations à deux corps et analyse multipolaire 111

5a. Distribution angulaire dans une désintégration à deux corps. Cas particuliers 115
5b. Dépendance angulaire des paramètres multipolaires d'une des particules dans l'état final.. 120
5c. Cas particuliers : dépendance angulaire de la polarisation longitudinale 122
5d. Expression des moyennes des paramètres multipolaires d'une des particules dans l'état final.. 125

CHAPITRE VI : Application à la détermination du spin et parité des résonances 129

6a. Rappel des propriétés de la matrice densité .. 129
6b. Test pour la détermination du spin de la résonance $A_2(1324)$ 134
6c. Test pour la détermination des spin et parité de résonances baryoniques étranges 136

TROISIEME PARTIE

THÉORIE RELATIVISTE DES CORRELATIONS ANGULAIRES DANS LES DESINTEGRATIONS A TROIS CORPS. APPLICATIONS 141

CHAPITRE VII : Description phénoménologique des désintégrations à trois corps 149

7a. Réduction de l'amplitude de transition en amplitudes irréductibles 149
7b. Paramétrisation de l'amplitude de transition en amplitudes invariantes relativistes 153
7c. Etude de la distribution angulaire des évènements finaux 156

CHAPITRE VIII : Application à l'analyse phénoménologique des résonances 161

8a. Distribution angulaire pour des processus du type $j \to 0,0,0$. Applications 163
8b. Distribution angulaire pour des processus du type $j \to j_1,0,0$ 170
8c. Dépendance angulaire des paramètres multipolaires de la particule finale 172
8d. Test pour la détermination du spin 176

APPENDICE A1 : Quelques formules complémentaires sur le groupe des rotations 27

APPENDICE A4 : Lois de transformation des fonctions $A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, $E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ et $F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, $H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ 103

APPENDICE B4 : Conservation de courant et facteurs de forme 105

APPENDICE A8 : Calcul de la distribution angulaire $I(\alpha,\beta,\gamma)$ pour des processus du type $j \to j_1,0,0$ 181

BIBLIOGRAPHIE 183

TABLE 2.1 Eléments de matrice $\left(T^{(L)}_{M}\right)^{*\lambda}_{\tilde{\lambda}} = \sqrt{2j+1}\begin{pmatrix}\lambda & L & j\\ j & M & \tilde{\lambda}\end{pmatrix}$,

pour $j = 1/2$ et $L = 1$; $j = 1$ et $L = 1,2$;
$j = 3/2$ et $L = 1, 2, 3$ 44

TABLE 3.1 Eléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants pseudoscalaires 65

TABLE 3.2 Eléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants vectoriels 67

INTRODUCTION

De nombreuses recherches expérimentales récentes en Physique des Hautes Energies ont mis en évidence une multitude de nouveaux états physiques qu'on appelle particules ou résonances selon l'ordre de grandeur de leur vie moyenne. Ces états sont labellés par un ensemble de nombres quantiques. Wigner, en 1939, a montré comment l'invariance relativiste nous en fourni deux : la masse m et le spin j, qui sont des invariants et qui caractérisent une représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré (groupe de Lorentz inhomogène).

Outre l'invariance relativiste, on sait qu'il existe d'autres formes d'invariance dans la nature ; invariances par rapport aux symétries discrètes : parité, renversement du mouvement, conjugaison de charge ; invariances de jauge ; invariances par rapport aux symétries internes : isospin, hypercharge, etc... (on trouvera d'excellents articles sur ces notions dans : "Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics", édité par Feza Gürsey ; Gordon and Breach, 1964). Bien que la nature "exacte" du lien entre "toutes" ces invariances reste encore mal connue, il est juste de signaler que beaucoup de progrès dans cette direction ont été néanmoins atteints ; grâce en grande partie aux analyses phénoménologiques rigoureuses des données expérimentales.

Rappelons très brièvement l'état de nos connaissances à ce sujet. A l'heure actuelle, nous sommes amenés à classer les états physiques, y compris les états stables (photon, neutrinos et anti-neutrinos ; électron et positron ; proton et antiproton), soit en leptons (charge leptonique $L_e \neq 0$ ou $L_\mu \neq 0$, et charge baryonique $B = 0$) soit en mésons ($L_e = L_\mu = 0$, $B = 0$) ou baryons ($L_e = L_\mu = 0$, $B \neq 0$).

Les leptons et les baryons ont spin demi-entier, les mésons spin entier ; un fait qui est exprimé par une formule remarquable introduite par Lurçat et Michel en 1961 :

$$(-1)^{2j} = (-1)^{L_e + L_\mu + B} \quad . \tag{1}$$

Chaque lepton et chaque hadron (méson ou baryon) sont encore un état propre de l'opérateur charge électrique Q.

L'hypothèse d'indépendance de charge des interactions fortes a conduit de façon naturelle à la considération d'un groupe de symétrie interne qui est le groupe de l'isospin. On introduit ainsi deux nombres quantiques nouveaux, nécessaires pour caractériser un état hadronique : ce sont l'isospin I et la troisième composante d'isospin I_3.

L'étude des réactions de production associée a donné lieu à l'introduction d'un nouveau nombre quantique : l'étrangeté S. Gell-Mann et Nishijima en 1953 ont montré que B, Q, I_3 et S satisfont à la relation

$$Q = I_3 + \frac{S + B}{2} \tag{2}$$

On appelle hypercharge la quantité

$$Y = S + B. \tag{3}$$

Notons que seuls les états hadroniques tels que $B = I_3 = Y = 0$ sont des états propres de l'opération conjugaison de charge C (opération d'échange particule ⇄ antiparticule). En vue de généraliser cette opération à tous les membres d'un même multiplet d'isospin, Michel en 1953 a introduit l'opération de parité isotopique G, définie par la relation

$$G = C \exp(i\pi I_2) \quad . \tag{4}$$

(Rappelons que pour le méson π, G = -1 ; pour un système à un nombre n de pions, $G = (-1)^n$. En général, pour un système où $I_3 = 0$ et où C est bien définie, $G = C(-1)^I$. Pour les systèmes K-$\bar{K}$, N-$\bar{N}$: $G=C(-1)^{L+j+I}$, où L représente le moment cinétique orbital et j le spin total).

La formule (2) est le point de départ de la généralisation du groupe d'isospin au groupe de la symétrie unitaire SU(3), introduit par Gell-Mann et Ne'eman en 1961. Dans un supermultiplet de SU(3), les états physiques sont classés selon leur contenu en isospin et hypercharge, tous les états d'un même supermultiplet ayant le même spin et la même parité.

L'hypothèse d'indépendance de spin et de spin unitaire des interactions fortes a été proposée en 1964 par Gürsey et Radicati, et par Sakita, comme une extension naturelle aux particules élémentaires de la théorie des supermultiplets de Wigner en spectroscopie nucléaire (1937). Dans cette théorie, les mésons pseudoscalaires et vectoriels sont classés dans la représentation 35 du groupe SU(6) ; les baryons avec j = 1/2 et 3/2 et parité +1 sont classés dans la représentation 56. Tous les états d'un même supermultiplet de SU(6) ont la même parité, mais ils peuvent avoir différents spins.

Le succès de la symétrie SU(6) comme outil pour relier les propriétés statiques des particules et des résonances a donné lieu récemment à beaucoup de recherches en vue de généralisations de cette symétrie aux processus de désintégration et aux phénomènes de diffusion. (Voir par exemple les proceedings de la Conférence de Coral Gables en Janvier 1965 et les rapports de Dalitz et de Gell-Mann à la Conférence d'Oxford, en Septembre 1965). Nous voici arrivés à un problème-frontière dans la physique des particules élémentaires.

Il est clair que, lorsqu'apparaît une nouvelle particule ou résonance, le premier objectif expérimental est la détermination de son ensemble de nombres quantiques. Du point de vue théorique,

cette détermination peut signifier la confirmation de l'existence d'un membre d'un supermultiplet dans un des schémas de symétries internes indiqués plus haut ; la prédiction, par application d'une formule de masse, de l'existence d'une nouvelle résonance ; ou le point de départ vers des modèles de plus en plus raffinés.

En fait, c'est la détermination du spin et de la parité qui présente le plus de difficultés. Bien entendu, les produits de désintégration d'un état physique instable, avec un spin bien défini, ont une distribution caractéristique due à l'invariance relativiste du processus de désintégration. Néanmoins, cette distribution est encore affectée et par le processus de production et par le mécanisme dynamique du processus de désintégration. Le problème qui se pose est de trouver des grandeurs mesurables qui soient reliées par des expressions dépendant uniquement de la cinématique des processus et qui soient très sensibles à la valeur du spin et de la parité. Peu à peu, on a réussi à trouver les expressions convenant aux différents cas particuliers : test d'Adair, en 1955, applicable à la production vers l'avant ; test de Lee et Yang, en 1958, applicable aux désintégrations faibles non leptoniques des baryons ; méthode des moments de Byers et Fenster, en 1963, applicable aux fermions qui se désintègrent en un baryon de spin 1/2 et un méson ; etc... (On trouvera des mises au point de tests pour la détermination du spin et de la parité, par exemple dans le cours de Jackson à l'Ecole d'été des Houches en 1965 ; et dans l'article de Tripp, "Spin and Parity Determination of Elementary Particles", Ann. Rev. Nuclear Science, Vol. 15, pp. 325-380).

Une fois que le spin et la parité d'un état sont déterminés, il reste à faire une analyse phénoménologique rigoureuse de ses modes de désintégration. Ici, par rigoureuse, nous entendons indépendante de tout modèle dynamique et basée sur des principes premiers : principe de superposition et invariance relativiste. D'une part, cette analyse doit préciser les restrictions imposées par la conservation de la parité ; et dans le cas où cela est possible, les restrictions imposées par la conservation de l'opération conjugaison de charge et par l'invariance par rapport au renversement du mouvement. D'autre part, une

analyse rigoureuse doit préciser tout l'ensemble des paramètres et fonctions invariantes qui caractérisent chaque mode de désintégration et les méthodes pour les mesurer, quand ceci est possible. Les différents modes de désintégration peuvent alors être utilisés comme des analyseurs pour déterminer les éléments de la matrice densité de l'état initial. Ceux-ci dépendent du mécanisme de production et leur détermination nous donne une information très importante sur la dynamique de la production.

Les notions précédentes forment la base sur laquelle s'appuie ce travail. Alors qu'il existe d'excellents articles sur l'invariance relativiste de la Mécanique Quantique (voir la bibliographie citée au début du chapitre I), les physiciens préfèrent, en général, étudier chaque cas particulier séparément, en se plaçant dans un système de référence où on applique les techniques non relativistes de la physique nucléaire. Il se trouve que cette méthode est tout à fait commode pour traiter un processus où les particules ont des spins 1/2 ou 1. Mais actuellement, avec l'apparition d'états à spins de plus en plus élevés, où on a plusieurs désintégrations successives, les méthodes "pédestres" deviennent de plus en plus pénibles.

C'est pourquoi un travail qui consiste essentiellement à appliquer les principes généraux de l'invariance relativiste à des classes de problèmes de corrélations angulaires en physique des Hautes Energies nous a semblé utile. Notre but a été d'une part d'obtenir un certain nombre d'expressions générales qui puissent être utilisées directement dans chaque cas particulier par un expérimentateur intéressé par les analyses de corrélations angulaires. D'autre part, nous avons essayé de montrer assez en détail comment obtenir ces expressions à partir des lois de transformation relativiste des états et des opérateurs.

Nous avons divisé ce travail en trois parties, plus deux chapitres à titre d'introduction. Dans ceux-ci, nous avons résumé quelques résultats fondamentaux de cinématique relativiste (chapitre I)

et les propriétés de la matrice densité de spin pour des particules de spin quelconque (Chapitre II). La première partie est une description de la cinématique relativiste des fonctions de vertex. Nous étudions les règles de sélection (parité et renversement de mouvement) et le développement des vertex en facteurs de forme multipolaires (Chapitres III et IV). La description phénoménologique des processus de désintégration en deux corps est le sujet de la deuxième partie (Chapitres V et VI) ; l'étude correspondante pour les processus de désintégration en trois corps est faite dans la troisième partie (Chapitres VII et VIII). Chaque partie et chaque chapitre sont précédés d'une introduction où on trouvera des détails plus techniques, ainsi que des commentaires sur le rapport avec les travaux d'autres auteurs.

Tout au long de ce travail, nous avons essayé d'illustrer par des applications l'intérêt des formules obtenues. On en trouvera des applications originales à la détermination du spin et de la parité dans les paragraphes 6b., 6c. et 8d.

Quelques détails techniques ont été rédigés dans des appendices (voir la table des matières).

Il est peut-être utile de donner une notice explicative pour la lecture de ce travail, par exemple : appendice B.4 veut dire deuxième appendice au chapitre 4 ; la formule (7.17) veut dire formule 17 du chapitre VII. Les notes qu'on trouve habituellement en bas de page sont reportées à la fin de chaque chapitre. Pour la bibliographie, Wigner [39] renvoie à l'article de Wigner de l'année 1939 repris dans la bibliographie finale.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

C H A P I T R E I

RAPPEL DE CINEMATIQUE RELATIVISTE
DEFINITIONS ET NOTATIONS

Dans ce premier chapitre d'introduction nous allons rappeler quelques résultats de la cinématique des particules élémentaires. Ceci nous permettra de réunir plusieurs lois et formules dont nous aurons besoin par la suite. Il existe d'excellents articles sur ce sujet dans la littérature. Je voudrais citer ici ceux qui ont été précieux pour l'élaboration de ce travail :

E.P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group", Ann. Math. 40, 149 (1939) ;

V. Bargman, "Irreducible unitary representations of the Lorentz group", Ann. Math. 48, 568 (1947) ;

L. Michel, "Covariant description of polarization", Suppl. Nuovo Cimento 14, 95 (1959) ;

A.S. Wightman, "L'invariance dans la mécanique quantique relativiste", dans Relations de dispersion et particules élémentaires (Herman, Paris 1960) ;

H. Joos, "Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentz gruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik", Fortschritte der Physik 10, 65 (1962).

§1a. ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

Un évènement x de l'espace-temps de Minkowski est caractérisé par un quadrivecteur de composantes

$$x = (x_o, x_1, x_2, x_3) \tag{1.1}$$

La structure d'espace-temps est déterminée par un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$; $\mu,\nu = 0, 1, 2, 3$, tel que le produit scalaire de deux quadrivecteurs x et y soit donné par la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} x.y \equiv g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu &= g^{\mu\nu} y_\mu x_\nu \\ &= x_o y_o - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Les composantes du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ sont :

$$g^{oo} = 1 \; ; \quad g^{oi} = g^{io} = 0 \; ; \quad g^{ij} = -\delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.3}$$

On a

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} (= \delta_{\mu\nu}).$$

Nous utilisons partout la convention de sommer sur les indices répétés en haut et en bas. Notons que

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

a pour composantes

$$x^o = x_o \quad \text{et} \quad x^i = -x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Selon que

$$\left.\begin{array}{l} x.x > 0 \\ x.x = 0 \\ x.x < 0 \end{array}\right\} \text{nous dirons que x est un quadrivecteur de genre } \left\{\begin{array}{l} \text{temps} \\ \text{lumière} \\ \text{espace.} \end{array}\right. \qquad (1.4)$$

Un exemple de quadrivecteur d'espace-temps est l'énergie-impulsion p d'une particule. Dans un système d'unités avec $\hbar = c = 1$, les composantes p_μ sont

$$p_\mu = (p_o = E, \vec{p})$$

et

$$p_\mu p^\mu = p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \qquad (1.5)$$

où m est la masse de la particule.

Nous aurons souvent besoin d'un autre algorithme d'espace-temps ; c'est le tenseur complètement antisymétrique $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ défini ainsi

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ est une permutation paire de } 0,1,2,3 \ ; \\ -1 \text{ si } \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ est une permutation impaire de } 0,1,2,3 \ ; \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{array}\right. \qquad (1.6)$$

Voici quelques propriétés de $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \ ; \qquad (1.7a)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4! \ ; \qquad (1.7b)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma'} = -3!\, g^{\sigma}{}_{\sigma'} \ ; \qquad (1.7c)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} = -2!\,(g^{\rho}{}_{\rho'}\, g^{\sigma}{}_{\sigma'} - g^{\rho}{}_{\sigma'}\, g^{\sigma}{}_{\rho'}) \ ; \qquad (1.7d)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu'\rho'\sigma'} = -1!\,(g^{\nu}{}_{\nu'}\, g^{\rho}{}_{\rho'}\, g^{\sigma}{}_{\sigma'} + g^{\nu}{}_{\sigma'}\, g^{\rho}{}_{\nu'}\, g^{\sigma}{}_{\rho'} + g^{\nu}{}_{\rho'}\, g^{\rho}{}_{\sigma'}\, g^{\sigma}{}_{\nu'} - g^{\nu}{}_{\rho'}\, g^{\rho}{}_{\nu'}\, g^{\sigma}{}_{\sigma'} - g^{\nu}{}_{\sigma'}\, g^{\rho}{}_{\rho'}\, g^{\sigma}{}_{\nu'} - g^{\nu}{}_{\nu'}\, g^{\rho}{}_{\sigma'}\, g^{\sigma}{}_{\rho'}) \ . \qquad (1.7e)$$

Le mot "tétrade" apparaît très fréquemment dans la suite : c'est un ensemble de 4-quadrivecteurs $\{t.n^{(i)}\}$ $i = 1, 2, 3$ tel que

$$\left.\begin{aligned} & t.n^{(i)} = 0 \; ; \quad n^{(i)}.n^{(j)} = -\delta_{ij} \text{ pour } i,j = 1,2,3 \\ \text{et} \quad & t^2 = 1 \; ; \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, t_\mu\, n^{(1)}_\nu\, n^{(2)}_\rho\, n^{(3)}_\sigma = 1. \end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

Par rapport à une tétrade de référence $\{t.\vec{n}\}$, les composantes du quadrivecteur p énergie-impulsion d'une particule sont

$$E = p.t \quad \text{et} \quad \vec{p} = -p.\vec{n} \quad . \qquad (1.9)$$

§1b. TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

1) Soit (a,Λ) une transformation linéaire réelle inhomogène des évènements d'espace-temps

$$x'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu x_\nu + a_\mu \; ; \quad y'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu y_\nu + a_\mu \qquad (1.10)$$

telle que pour tout y la séparation des évènements x et y reste invariante

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 \quad . \qquad (1.11)$$

L'ensemble des transformations (a,Λ) ainsi définies forme le groupe de Poincaré $\mathcal{P}^{(1)}$. La loi de multiplication est la suivante

$$(a,\Lambda)(b,\Lambda') = (a+\Lambda b,\ \Lambda\Lambda') \; ; \qquad (1.12)$$

l'élément neutre (unité) est $(0,I)$ et l'élément inverse de (a,Λ) est

$$(a,\Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a,\ \Lambda^{-1}) \quad . \qquad (1.13)$$

L'ensemble des transformations $(0,\Lambda)$ forme le groupe de Lorentz L. D'après (1.10) et (1.11) les éléments de Λ définissent

une transformation de Lorentz si et seulement si

$$\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\, g_{\nu\mu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\rho} = g_{\sigma\rho} \quad . \tag{1.14}$$

L'ensemble des transformations $(0,\Lambda)$ avec $\det \Lambda = +1$ forme le groupe de Lorentz propre L_+. Notons que

$$L = L_+ + TL_+ \tag{1.15}$$

où T est l'opération renversement de temps

$$Tx_o = -x_o \; ; \quad T\vec{x} = \vec{x} \quad . \tag{1.16}$$

L'ensemble des transformations $(0,\Lambda)$ avec $\det \Lambda = 1$ et $\Lambda^{o}_{o} \geq 1$ forme le groupe de Lorentz restreint (groupe de Lorentz propre et orthochrone) $L_+^{\uparrow}$. Notons que

$$L_+ = L_+^{\uparrow} + PT\, L_+^{\uparrow} \tag{1.17}$$

où P est l'opération inversion d'espace

$$Px_o = x_o, \quad P\vec{x} = -\vec{x} \quad . \tag{1.18}$$

2) Soit n un quadrivecteur tel que $n^2 \neq 0$, et Σ_n l'opération de symétrie pour l'hyperplan orthogonal à n

$$\Sigma_n = 1 - 2\, \frac{n \otimes n}{n^2} = \Sigma_{-n} \quad , \tag{1.19}$$

où $\otimes$ est le symbole produit tensoriel (ici de quadrivecteurs).
La réflexion Σ_n appliquée à un quadrivecteur x s'exprime ainsi

$$\Sigma_n\, x = x' = x - 2\, \frac{(n.x)}{n^2}\, n \quad . \tag{1.20}$$

Nous utiliserons par la suite le théorème suivant (un cas particulier

d'un théorème de Cartan [37]) : "toute transformation du groupe de Lorentz avec det $\Lambda = 1$ (respectivement det $\Lambda = -1$) est le produit de 2 ou 4 réflexions (respectivement 1 ou 3). Parmi ces réflexions, un nombre pair (0,2,4) correspondent à des vecteurs de genre temps si $\Lambda^o_o \geq 1$, un nombre impair (1,3) si $\Lambda^o_o \leq 1$". (Voir par exemple Michel [58] pour une démonstration de ce théorème).

Un cas particulier très important de transformations Λ est celui des transformations de Lorentz pures. Nous allons les discuter un peu en détail.

Soient a et b deux quadrivecteurs tels que

$$a^2 = b^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_o > 0 \; ; \; b_o > 0.$$

Nous appelons transformation de Lorentz pure $\Lambda_{a\to b}$ l'opération

$$\Lambda_{a\to b} = \Sigma_{b+a} \, \Sigma_a \quad . \tag{1.21}$$

Elle transforme a en b et laisse le 2-plan orthogonal à a et b invariant. D'après (1.19) on a

$$\Lambda_{a\to b} = 1 - \frac{(b+a) \otimes (b+a)}{1 + a.b} + 2b \otimes a \quad . \tag{1.22}$$

Exprimé en fonction des composantes a_μ et b_μ on a

$$b_\mu = (\Lambda_{a\to b})^\nu{}_\mu \, a_\nu \; , \tag{1.23}$$

avec

$$(\Lambda_{a\to b})^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu - (1 + a.b)^{-1} \{b_\mu b^\nu + a_\mu a^\nu + a_\mu b^\nu - [1 + 2(a.b)] b_\mu a^\nu\} \; . \tag{1.24}$$

Considérons le cas où les composantes de a et b sont

$$a_\mu = (1, \vec{0}) \; ; \quad b_\mu = (E/m, \vec{p}/m) \; ;$$

les éléments de matrice correspondants sont

$$(\Lambda_{a\to b})^{\nu}{}_{\mu} = \left(\begin{array}{c|c} E/m & \vec{p}/m \\ \hline \vec{p}/m & \mathbb{1} + \dfrac{\vec{p}\otimes\vec{p}}{m(E+m)} \end{array}\right) \quad ; \qquad (1.25)$$

ou encore, avec

$$\beta = |\vec{p}|/E \; ; \quad \gamma = E/m \quad \text{et} \quad \hat{v} = \vec{p}/|\vec{p}| \; , \qquad (1.26a,b,c)$$

$$(\Lambda_{a\to b})^{\nu}{}_{\mu} = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \beta\gamma\hat{v} \\ \hline \beta\gamma\hat{v} & \mathbb{1} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\,\beta\hat{v}\otimes\beta\hat{v} \end{array}\right) \quad . \qquad (1.27)$$

Lorsque $\hat{v}$ est dirigé selon la troisième composante d'espace on a

$$(\Lambda_{a\to b})^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} ch\chi & 0 & 0 & sh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh\chi & 0 & 0 & ch\chi \end{pmatrix}, \qquad (1.28)$$

où

$$ch\chi = \gamma = E/m \; ; \quad sh\chi = \beta\gamma = |\vec{p}|/m \quad \text{et} \quad th\chi = \beta = |\vec{p}|/E \; . \qquad (1.29abc)$$

§1c. TRANSFORMATIONS SPINORIELLES[2]

1) A chaque quadrivecteur x_μ nous pouvons associer une matrice 2 x 2 de la façon suivante,

$$x_\mu \;\to\; \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_o - x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_o + x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu \tau_\mu = x_o \tau_o + \vec{x}.\vec{\tau} \ , \qquad (1.30)$$

où τ_o est la matrice unité

$$\tau_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.31)$$

et $\vec{\tau}$ les matrices de Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.32abc)$$

Réciproquement, à toute matrice 2 x 2 X on peut associer un quadri-vecteur x_μ par l'opération

$$x_\mu = \frac{1}{2} \text{ tr } (\tau_\mu X) \ . \qquad (1.33)$$

Si X est hermitique, alors x_μ est réel. Notons que

$$\det \underset{\sim}{x} = x^\mu x_\mu \qquad (1.34)$$

et

$$x^\mu y_\mu = \frac{1}{2}[\det(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}) - \det \underset{\sim}{x} - \det \underset{\sim}{y}] \ . \qquad (1.35)$$

Soit A une matrice complexe 2 x 2 de déterminant unité et $\underset{\sim}{x}'$ la matrice obtenue à partir de $\underset{\sim}{x}$ par la transformation

$$\underset{\sim}{x}' = A \, \underset{\sim}{x} \, A^* \ , \qquad (1.36)$$

où A* est la matrice hermitique conguguée de A. Cette transformation est telle que

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \ ,$$

c'est donc une transformation de Lorentz. C'est la transformation[3]

$$\Lambda(A)^\nu_{\ \mu} = \frac{1}{2} \text{tr}(\tau^\nu A \tau_\mu A^*) \ , \qquad (1.37a)$$

avec $\tau^\nu = (\tau_o, -\vec{\tau})$. On peut montrer en plus qu'elle appartient à $L_+^{\uparrow}$(4). Réciproquement, toute transformation de Lorentz $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ peut s'écrire sous forme de matrice 2 x 2. Le passage est donné par la formule suivante(3) :

$$\pm A(\Lambda) = \frac{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \tau_{\mu}\, \tau^{\nu}}{[\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, \tau_{\alpha}\, \tau^{\beta}\, \Lambda^{\delta}{}_{\gamma}\, \tau_{\delta}\, \tau^{\gamma}]^{1/2}} \quad . \qquad (1.37b)$$

En particulier, la matrice 2 x 2 correspondant à la transformation (1.22) est la suivante

$$\pm A(\Lambda_{a\to b}) = [2(1+a.b)]^{-1/2} \{1 + [b_o + \vec{b}.\vec{\tau}][a_o - \vec{a}.\vec{\tau}]\} \; . \qquad (1.38)$$

2) L'ensemble des matrices complexes 2 x 2 unimodulaires (de déterminant unité) forme le groupe SL(2,c). L'application

$$A \to \Lambda(A) \qquad (1.39)$$

est un homomorphisme du groupe SL(2,c) sur le groupe $L_+^{\uparrow}$

$$SL(2,c) \to L_+^{\uparrow} \; .$$

Le noyau de cet homomorphisme contient les matrices unité 1 et -1 ; c'est-à-dire que(5)

$$\Lambda(-A) = \Lambda(A) \; .$$

Un sous-groupe important de SL(2,c) est celui formé par les matrices unitaires, c'est le groupe SU(2). En prenant la trace dans (1.36) on trouve, si A est unitaire,

$$2x'^{o} = 2x^{o} \quad ;$$

c'est-à-dire, la direction de temps reste invariante. Pour les matrices A unitaires, l'application (1.39) est un homomorphisme du groupe SU(2)

sur le groupe de rotations à trois dimensions,

$$SU(2) \rightarrow O_3 \quad .$$

Toute représentation finie irréductible de SL(2,c) est définie par deux nombres positifs j_1, j_2 entiers ou demi-entiers

$$A \in SL(2,C) \rightarrow D^{(j_1,j_2)}(A) \quad . \tag{1.40}$$

La dimension de la représentation est

$$(2j_1+1) \times (2j_2+1) \quad . \tag{1.41}$$

Les représentations (1.40) avec j_1+j_2 entiers sont des représentations uniformes de $L_+^\uparrow$. Toutes les autres représentations (1.40) sont des représentations multiformes, à double détermination, de $L_+^\uparrow$[6]. Ces représentations ne sont pas unitaires[7]. En particulier, la représentation $D^{(1/2,1/2)}(A)$ est équivalente à la représentation matricielle Λ^μ_ν.

Les représentations irréductibles de SU(2) sont définies par un nombre positif j, entier ou demi-entier

$$A \in SU(2) \rightarrow D^{(j,0)}(A) \simeq D^{(0,j)}(A) \equiv D^{(j)}(A) \, . \tag{1.42}$$

Ces représentations sont unitaires[8]. Notons que la représentation de SU(2) qu'on obtient en imposant à A dans $D^{(j_1,\, j_2)}(A)$ d'être unitaire : $A \in SU(2)$, n'est pas irréductible ; mais on a

$$D^{(j_1,j_2)}(A) \simeq \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)}(A), \quad \text{pour } A \in SU(2) \tag{1.43}$$

§1d. REMARQUE SUR LE GROUPE DES ROTATIONS

1) Soit $\{t,\vec{n}\}$ une tétrade de référence (1.8). L'ensemble des transformations $\Lambda \in L_+^\uparrow$ qui laissent invariant t forme le petit groupe de t. Puisque t est de genre temps, il s'agit du groupe des rotations à 3-dimensions.

Avec une transformation de Lorentz $\Lambda \in L_+^\uparrow$ et un quadri-vecteur u, tel que $u^2 = 1$, nous pouvons définir une rotation du petit groupe de t de la façon suivante :

$$R(u,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\, \Lambda\, \Lambda_{t\to u} \,. \tag{1.44}$$

Cette transformation laisse invariant t ; en effet

$$R(u,\Lambda)t = (\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\, \Lambda)\, \Lambda_{t\to u}\, t = (\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u})\, \Lambda u = t \,.$$

La matrice 3 x 3 associée à $R(u,\Lambda)$ et agissant dans le 3-plan orthogonal à t est

$$R^i_{\ j}(u,\Lambda) = - R(u,\Lambda)^\nu_{\ \mu} n^{(i)}_\nu\, n^\mu_{(j)} \quad ; \quad i,j = 1,2,3. \tag{1.45}$$

la matrice 2 x 2 unitaire et unimodulaire associée à cette rotation est donnée par la formule[9]

$$\pm\, A[R(u,\Lambda)] = [1 + R^i_{\ i}(u,\Lambda)]^{-1/2}\, 1/2[1 + R^{ij}(u,\Lambda)\tau_i\tau_j]. \tag{1.46}$$

Ecrivons cette matrice sous la forme

$$A[R(u,\Lambda)] = \begin{pmatrix} a(u,\Lambda) & b(u,\Lambda) \\ -\bar{b}(u,\Lambda) & \bar{a}(u,\Lambda) \end{pmatrix} \quad ; \tag{1.47a}$$

avec

$$|a(u,\Lambda)|^2 + |b(u,\Lambda)|^2 = 1 \,. \tag{1.47b}$$

Alors l'expression générale des éléments de la représentation $D^{(j)}[A(u,\Lambda)]^{\lambda'}_{\lambda}$ de SU(2) est la suivante[8] :

$$D^{(j)}\{A[R(u,\Lambda)]\}^{\lambda'}_{\lambda} = \sum_{\zeta} (-1)^{\zeta} \frac{\sqrt{(j+\lambda)!\,(j-\lambda)!\,(j+\lambda')!\,(j-\lambda')!}}{(j-\lambda'-\zeta)!\,(j+\lambda-\zeta)!\,\zeta!\,(\zeta+\lambda'-\lambda)!} \times$$

$$\times \quad a(u,\Lambda)^{j-\lambda'-\zeta}\, \overline{a(u,\Lambda)}^{j+\lambda-\zeta}\, b(u,\Lambda)^{\zeta}\, \overline{b(u,\Lambda)}^{\zeta+\lambda'-\lambda} \,. \qquad (1.48)$$

Toute représentation de SU(2) est une représentation, uniforme ou multiforme selon que j est entier ou demi-entier, du groupe des rotations. Dans la suite nous utilisons les notations suivantes pour décrire une représentation de rang j du groupe des rotations :

$$D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\lambda'}_{\lambda} \; ; \quad D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda'}_{\lambda}$$

ou simplement $D^{(j)}(R)^{\lambda'}_{\lambda}$ lorsque l'argument de R est sous-entendu. Par $D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\lambda'}_{\lambda}$ on entend l'expression (1.48). Si α,β,γ sont les angles d'Euler qui définissent la rotation $R^{i}_{j}(u,\Lambda)$ dans (1.45), alors l'expression de $D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda'}_{\lambda}$ est donnée par (1.48) avec

$$a(u,\Lambda) = e^{-i\alpha/2} \cos\beta/2\; e^{-i\gamma/2} \quad \text{et} \quad b(u,\Lambda) = -e^{-i\alpha/2} \sin\beta/2\; e^{i\gamma/2} \,. \qquad (1.49a,b)$$

Rappelons-nous quelques propriétés des fonctions $D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda'}_{\lambda}$:

$$D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda'}_{\lambda} = e^{i\lambda'\alpha}\, d^{(j)}(\beta)^{\lambda'}_{\lambda} e^{i\lambda\gamma} \; ; \qquad (1.50)$$

$$\overline{D^{(j)}(R)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{\lambda-\lambda'}\, D^{(j)}(R)^{-\lambda'}_{-\lambda} \; ; \qquad (1.51a)$$

$$D^{(j)}(R^{-1})^{\lambda'}_{\lambda} = (D^{(j)}(R)^{\lambda'}_{\lambda})^{*} = \overline{D^{(j)}(R)^{\lambda}_{\lambda'}} \; ; \qquad (1.51b)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma\; \overline{D^{(j_1)}(R)^{\lambda'_1}_{\lambda_1}}\, D^{(j_2)}(R)^{\lambda'_2}_{\lambda_2} = \delta_{\lambda_1\lambda_2}\, \delta_{\lambda'_1\lambda'_2}\, \delta_{j_1 j_2}\, \frac{1}{2j_1+1} \; ; \qquad (1.52)$$

$$D^{(l)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{m}_{o} = (-1)^{m} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} Y^{(l)}_{m}(\beta,\alpha), \; l \text{ entier} \qquad (1.53)$$

où $Y_m^{(l)}(\beta,\alpha)$ sont les fonctions harmoniques sphériques du groupe des rotations ;

$$D^{(l)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{o}_{c} = P_l(\cos\beta) \quad , \tag{1.54}$$

$P_l(\cos\beta)$ sont les polynômes de Legendre.

2) Nous utilsons les symboles 3-j pour décrire les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-\lambda_3}}{\sqrt{2j_3+1}} (j_1\ \lambda_1,\ j_2\ \lambda_2 | j_1\ j_2\ ;\ j_3-\lambda_3) \equiv$$

$$\equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2-\lambda_3}}{\sqrt{2j_3+1}} C(j_1 j_2 j_3;\ \lambda_1 \lambda_2) \quad . \tag{1.55}$$

Nous avons trouvé très commode de travailler avec les 3-j covariants et contravariants de Wigner[10]. Un symbole 3-j contravariant dans un de ses indices est donné en fonction du symbole 3-j ordinaire par l'expression

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ \lambda_1 & \lambda_2 & j \end{pmatrix} = C^{\lambda\lambda'}_{(j)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda' \end{pmatrix} = (-1)^{j-\lambda} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda \end{pmatrix} . \tag{1.56}$$

Notons que $C^{\lambda\lambda'}_{(j)}$ sont les éléments de la matrice unitaire C qui transforme une représentation $D^{(j)}(R)$ en sa complexe conjuguée

$$C\ D^{(j)}(R)\ C^{-1} = \overline{D^{(j)}(R)} \quad . \tag{1.57}$$

Explicitement

$$C^{\lambda\lambda'}_{(j)} = (-1)^{j-\lambda}\ \delta_{\lambda,\ -\lambda'} \quad ; \tag{1.58a}$$

$$C^{(j)}_{\lambda\lambda'} = (-1)^{j-\lambda'}\ \delta_{\lambda,-\lambda'} \quad . \tag{1.58b}$$

Dans (1.56) $C^{\lambda\lambda'}_{(j)}$ joue le rôle d'un tenseur métrique. Avec ces notations, les relations d'orthonormalité des symboles 3-j s'expriment ainsi :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda' \\ j_1 & j_2 & j' \end{pmatrix} = \frac{\delta_{jj'}\delta_{\lambda\lambda'}}{2j+1} , \qquad (1.59)$$

et

$$\sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda \\ j_1 & j_2 & j \end{pmatrix} = \delta_{\lambda_1\lambda'_1}\,\delta_{\lambda_2\lambda'_2} . \qquad (1.60)$$

Quelques formules complémentaires sont données dans l'appendice A1.

3) La réduction d'un produit de représentations $D^{(j_1)}(R)\, D^{(j_2)}(R)$ en représentations irréductibles est donnée par la formule suivante[11]

$$D^{(j_1)}(R)^{\lambda'_1}_{\lambda_1} D^{(j_2)}(R)^{\lambda'_2}_{\lambda_2} =$$

$$= \sum_{j,\lambda',\lambda} (2j+1) \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda' \\ j_1 & j_2 & j \end{pmatrix} D^{(j)}(R)^{\lambda'}_{\lambda} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix} . \qquad (1.61)$$

Multiplions cette expression par $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}$ avec sommation sur les indices λ'_1 et λ'_2. Par application de (1.59) et en utilisant (1.51a) et (1.56) on déduit la relation

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda' \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & j \end{pmatrix} D^{(j_1)}(R)^{\lambda'_1}_{\lambda_1} D^{(j_2)}(R)^{\lambda'_2}_{\lambda_2} = D^{(j)}(R)^{\lambda'}_{\lambda} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ \lambda_1 & \lambda_2 & j \end{pmatrix} \qquad (1.62)$$

Une autre relation importante qu'on peut déduire de (1.62) si on prend le complexe conjugué et si on utilise (1.51b) et (1.56) est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & j \\ j_1 & j_2 & \lambda \end{pmatrix} D^{(j_1)}(R)^{\lambda'_1}_{\lambda_1} D^{(j_2)}(R)^{\lambda'_2}_{\lambda_2} = D^{(j)}(R)^{\lambda'}_{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 & j \\ j_1 & j_2 & \lambda \end{pmatrix} . \qquad (1.63)$$

§1e. LOIS DE TRANSFORMATION DES ETATS A UNE PARTICULE

Les générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$ sont :

P_μ $(\mu = 0,1,2,3)$, pour les générateurs du sous-groupe des translations d'espace-temps ;

$M_{\mu\nu} = - M_{\nu\mu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, pour les générateurs du sous-groupe des transformations de Lorentz dans le 2-plan μ-ν qui laissent invariantes les deux autres coordonnées.

Leurs relations de commutation sont,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad ; \tag{1.64}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \; ; \tag{1.65}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho} P_\mu - g_{\mu\rho} P_\nu). \tag{1.66}$$

Ces commutateurs définissent l'algèbre de Lie de $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Nous cherchons ici un ensemble complet d'observables qui commutent. Mathématiquement c'est construire une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre enveloppante définie à partir de l'algèbre de Lie de $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Voici une solution :

$$P^\mu P_\mu \quad ; \quad W^\mu W_\mu \quad , \tag{1.67a,b}$$

où W_μ est l'opérateur de polarisation[12]

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \quad ; \tag{1.68}$$

$$P_\mu \; (\mu = 0,1,2,3) \text{ et une composante de } W_\mu \; . \tag{1.67c,d}$$

Notons que $P^\mu P_\mu$ et $W^\mu W_\mu$ commutent avec tous les P_μ et $M_{\mu\nu}$. Ils appartiennent donc au centre de l'algèbre enveloppante. En vertu du lemme de Schur, pour une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{P}_+^\uparrow$, ils

sont multiples de l'opérateur identité I :

$$P^2 \equiv P^\mu P_\mu = m^2 I \ , \qquad (1.67a)$$

m étant la masse de la particule ;

$$W^2 \equiv W^\mu W_\mu = - m^2 j(j+1) I \ , \qquad (1.67b)$$

j étant le spin de la particule.

Un état à une particule d'énergie-impulsion p, de masse $m > 0$ et spin j est un état propre des opérateurs

$$P^2 |p,j\lambda\rangle = m^2 |p.j\lambda\rangle \ ; \ \frac{W^2}{m^2} |p,j\lambda\rangle = -j(j+1) |p,j\lambda\rangle \ ; \qquad (1.68a,b)$$

$$P^\mu |p,j\lambda\rangle = p^\mu |p,j\lambda\rangle \quad \text{et} \quad - \frac{W^\mu s_\mu}{m} |p,j\lambda\rangle = \lambda |p,j\lambda\rangle ; \qquad (1.68c,d)$$

où

$$s^2 = -1 \quad \text{et} \quad s.p = 0 \ . \qquad (1.69)$$

Par rapport à une tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$ (1.8), il convient de choisir l'axe s ainsi

$$s = \Lambda_{t \to p/m} \, n^{(3)} \ . \qquad (1.70)$$

La transformation sur les états $|p,j\lambda\rangle$ induite par une transformation $(a,\Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ est réalisée par un opérateur unitaire $U(a,\Lambda)$ d'après la loi suivante[13]

$$\left.\begin{aligned} U(a,\Lambda)|p,j\lambda\rangle &= e^{i\Lambda p.a} \, D^{(j)}\left[R(u,\Lambda)\right]^{\lambda'}_{\lambda} |\Lambda p, j\lambda'\rangle, \\ \text{avec} \qquad R(u,\Lambda) &= \Lambda^{-1}_{t \to \Lambda u} \Lambda \, \Lambda_{t \to u} \quad \text{et} \quad u = p/m \ . \end{aligned}\right\} \qquad (1.71)$$

Les états $|p,j\lambda\rangle$ sont normalisés dans le continuum

$$\langle p',j'\lambda' | p,j\lambda\rangle = 2|p_0| \, \delta(\vec{p}-\vec{p}') \, \delta_{jj'} \, \delta_{\lambda\lambda'} \ . \qquad (1.72)$$

L'espace d'Hilbert des états est formé par des vecteurs

$$|\Phi\rangle = \sum_{\lambda=-j}^{j} \int d\Omega_m(p)\, |p,j\lambda\rangle \langle p,j\lambda|\Phi\rangle \,, \tag{1.73}$$

où $d\Omega_m(p)$ est l'élément de volume invariant

$$d\,\Omega_m(p) = \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \,. \tag{1.74}$$

La norme de (1.73) est

$$\left.\begin{aligned} \langle\Phi|\Phi\rangle &= \sum_{\lambda=-j}^{j} \int d\,\Omega_m(p)\, |\Phi(p,j\lambda)|^2 \,, \\ \text{avec} \qquad \Phi(p,j\lambda) &\equiv \langle p,j\lambda|\Phi\rangle \,. \end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

La loi de transformation des états $|p,j\lambda\rangle$ induite par l'opération d'inversion d'espace P (1.18) est réalisée par un opérateur unitaire U(P) de la façon suivante[14]

$$\left.\begin{aligned} U(P)|p,j\lambda\rangle &= \varepsilon\, |Pp,j\lambda\rangle \\ \text{avec} \qquad (Pp)_\mu &= (p_o, -\vec{p}) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1 \,. \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

La transformation des états $|p,j\lambda\rangle$ induite par l'opération renversement de temps T (1.16) est réalisée par un opérateur antiunitaire U(T) de la façon suivante[14]

$$U(T)|p,j\lambda\rangle = (-1)^{j+\lambda}|Pp,j-\lambda\rangle \,. \tag{1.77}$$

Notons que

$$U(T)^2 = (-1)^{2j} \,, \tag{1.78}$$

- - - - - -

N O T E S
(Chapitre 1)

(1) Récemment Zeeman [64] a montré comment la causalité implique le groupe $\mathcal{P}$ et les dilatations. Nous recommandons l'article de Zeeman au lecteur théoricien.

(2) Pour une introduction au calcul spinoriel voir par exemple Van der Waerden [32].

(3) Voir par exemple Macfarlane [62].

(4) Voir par example Streater et Wightman [64], chapitre 1.

(5) Pour une discussion détaillée de ces propriétés voir Michel [62].

(6) Pour une étude détaillée des représentations de SL(2,c) voir Naĭmark [62].

(7) Les représentations unitaires non triviales du groupe de Lorentz sont toutes à un nombre infini de dimensions ; voir Naĭmark [62]. Pour le groupe de Lorentz à trois dimensions, voir Bargmann[47].

(8) Voir par exemple le livre de Wigner [59]. Voir aussi Bargmann [64a].

(9) Voir réf. 3.

(10) Voir Wigner [59], chapitre 24.

(11) Voir par exemple Edmonds [57], chapitre 4.

(12) Cet opérateur a été introduit par Pauli (non publié ; cité par Lubanski [42]). Voir aussi Bargmann et Wigner [48].

(13) Une discussion détaillée de cette loi de transformation ainsi que des lois de transformation par inversion d'espace et renversement de temps est faite dans Wigner [62].

(14) Voir réf. 13. Pour une discussion simplifiée voir Wick [65].

- - - - - -

A P P E N D I C E A1

QUELQUES FORMULES COMPLEMENTAIRES SUR LE GROUPE DES ROTATIONS (voir le §1d)

Les formules suivantes sont utilisées fréquemment dans le texte. Pour leurs démonstrations voir par exemple les livres de Edmonds [57] et Wigner [59].

Un cas particulier de (1.52) est

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{Y}_m^{(l)}(\beta,\alpha)\, Y_{m'}^{(l')}(\beta,\alpha)\, \sin\beta d\beta d\alpha = \delta_{ll'}\delta_{mm'} . \qquad (A1.a)$$

Un cas particulier de (1.61) est

$$Y_{m_1}^{(l_1)}(\beta,\alpha) Y_{m_2}^{(l_2)}(\beta,\alpha) = \sum_{l,m}\left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix} Y_m^{(l)}(\beta,\alpha)\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ o & o & o\end{pmatrix} \qquad (A1.b)$$

Nous utilisons les symboles 6-j pour décrire les coefficients de Racah[1]. Une relation très pratique entre symboles 3-j et 6-j est la suivante

$$\begin{pmatrix} j_1 & s_2 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \mu_1 & s_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & j_2 & s_3 \\ s_1 & \lambda_2 & \mu_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 & \mu_2 & j_3 \\ \mu_1 & s_2 & \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ s_1 & s_2 & s_3\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\end{pmatrix} \qquad (A1.c)$$

En particulier[2]

$$\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_1 & l_3 \\ o & o & o\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} s_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ l_2 & s_2 & l_3\end{Bmatrix} = (-1)^{2l_1}\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & l_3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & o\end{pmatrix} . \qquad (A1.d)$$

Parfois nous aurons besoin aussi des symboles 9-j[3] :

$$\begin{Bmatrix} L & j_1 & j_2 \\ \tilde{L} & l_1 & l_2 \\ L' & s_1 & s_2 \end{Bmatrix} = \sum_K (-1)^{2K}(2K+1) \begin{Bmatrix} L & \tilde{L} & L' \\ s_1 & s_2 & K \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & l_1 & s_1 \\ \tilde{L} & K & l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & l_2 & s_2 \\ K & L & j_1 \end{Bmatrix} . \quad \text{(A1.e)}$$

quelques expressions algébriques particulières des 3-j, 6-j et 9-j sont :

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j-\lambda}}{\sqrt{2j+1}} \quad ; \quad \text{(A1.f)}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour } j_1 + j_2 + j_3 \text{ impair} \quad ; \quad \text{(A1.g)}$$

$$\begin{pmatrix} j & j & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-\lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{(2j+1)(j+1)j}} \quad ; \quad \text{(A1.h)}$$

$$\begin{pmatrix} j & j & 2 \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-\lambda} \frac{2[3\lambda^2 - j(j+1)]}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)(2j+1)2j(2j-1)}} \quad ; \quad \text{(A1.i)}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & j & s \\ 0 & s & j \end{Bmatrix} = (-1)^{1+j+s} [(2j+1)(2s+1)]^{-1/2} \quad ; \quad \text{(A1.j)}$$

$$\begin{Bmatrix} L & j_1 & j_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ L & s_1 & s_2 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_1+s_2+1+L}}{\sqrt{(2l+1)(2L+1)}} \begin{Bmatrix} s_1 & j_1 & 1 \\ j_2 & s_2 & L \end{Bmatrix} . \quad \text{(A1.k)}$$

Pour une table des valeurs numériques des symboles 3-j et 6-j voir Rotenberg, Metropolis, Bivins et Wooten [61].

- - - - - - -

N O T E S

(Appendice 1.1)

(1) Voir Wigner [59], ch. 24.

(2) Voir par exemple Devons et Goldfarb [57], formule (A.17).

(3) Voir par exemple Edmonds [57], §6.9.

C H A P I T R E II

MATRICE DENSITE DE SPIN POUR DES PARTICULES DE SPIN QUELCONQUE

Considérons un faisceau monocinétique de particules X de spin j produites dans un certain processus ; par exemple dans la diffusion de deux particules a et b

$$a + b \rightarrow X + c + \ldots \tag{2.1}$$

et supposons qu'on cherche à étudier la distribution de spin dans l'ensemble des particules X. En mécanique quantique cet ensemble est un mélange incohérent de $(2j + 1)$ états purs de polarisation, $|\Phi_n\rangle$, chacun avec une probabilité c_n $(0 < c_n < 1)$, et il est donc décrit par un opérateur matrice densité [1]

$$\rho = \sum_{n=-j}^{j} |\Phi_n\rangle\, c_n\, \langle\Phi_n| \ . \tag{2.2}$$

Dans ce deuxième chapitre d'introduction nous allons résumer les propriétés générales d'une description relativiste de la matrice densité[2]. En particulier, nous discutons en détail le lien entre le formalisme covariant et la paramétrisation multipolaire. Ceci nous permettra de montrer quelques formules que nous utiliserons fréquemment dans la suite.

§2a. PARAMETRISATION MULTIPOLAIRE DE LA MATRICE DENSITE

Nous désignerons par $\rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}}$ les éléments de matrice de l'opérateur ρ dans la base canonique $|p,j\lambda\rangle$ des états à une particule,

$$\rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}} = \langle p,j\lambda|\rho|p,j\tilde{\lambda}\rangle \ . \tag{2.3}$$

D'après (1.71), les éléments de matrice (2.3) sont liés à ceux de l'opérateur

$$\rho' = U(\Lambda)\ \rho\ U^{-1}(\Lambda) \ , \tag{2.4}$$

par la loi de transformation suivante

$$\rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}} = D^{(j)}[R^{-1}(u,\Lambda)]^{\lambda}_{\ \lambda'} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \rho'(\Lambda p)^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} , \tag{2.5}$$

avec

$$R(u,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\ \Lambda\ \Lambda_{t\to u} \quad \text{et} \quad u = p/m \ .$$

Nous pouvons appliquer au produit $D^{(j)}(R^{-1})\ D^{(j)}(R)$ la formule de réduction (1.63) en utilisant (1.51a,b) et (1.56). On trouve ainsi les relations

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & L & j \\ j & M & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}} = D^{(L)}[R(u,\Lambda)]^{M'}_{M} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}' & L & j \\ j & M' & \lambda' \end{pmatrix} \rho'(\Lambda p)^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} \ , \tag{2.6}$$

où les indices L et M prennent des valeurs entières comprises dans les intervalles

$$0 \le L \le 2j \quad \text{et} \quad -L \le M \le L \ . \tag{2.7}$$

Pour chaque valeur de L, l'ensemble des 2L+1 éléments

$$\bar{t}^{(L)}_{M}(p) = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & L & j \\ j & M & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}} \tag{2.8}$$

sont d'après (2.6) les éléments d'un tenseur irréductible :

$$\overline{t^{(L)}_{M}(p)} = D^{(L)}[R(u,\Lambda)]^{M'}_{M}\,\overline{t'^{(L)}_{M'}}\,(\Lambda p) \quad . \tag{2.9}$$

L'expression du développement des éléments $\rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}}$ en termes des paramètres $t^{(L)}_{M}(p)$ est obtenue par inversion de (2.8). En tenant compte de la relation d'orthogonalité des symboles 3-j (1.60) on trouve le résultat

$$\rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \sum_{L,M} (2L+1)\, \bar{t}^{(L)}_{M}(p) \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \quad . \tag{2.10}$$

Nous appellerons <u>paramètres multipolaires</u> de la matrice densité les éléments $t^{(L)}_{M}(p)$ et <u>développement multipolaire de la matrice densité</u> l'expression (2.10).

Voyons quelques propriétés des paramètres $t^{(L)}_{M}(p)$:

(1) Le terme $t^{(o)}_{o}(p)$ est égal à tr $\rho(p)$. En effet,

$$\bar{t}^{(o)}_{o}(p) = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)^{\lambda}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \rho(p)^{\lambda}_{\lambda} \quad .$$

La condition tr $\rho = 1$ implique donc[3]

$$t^{(o)}_{o} = 1 \quad . \tag{2.11}$$

(2) L'hermiticité de la matrice densité implique les relations

$$\bar{t}^{(L)}_{-M}(p) = (-1)^{M}\, t^{(L)}_{M}(p) \quad . \tag{2.12}$$

En effet, les quantités

$$\sqrt{2j+1}\ (-1)^{M} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & M & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \overline{\rho(p)}^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} = (-1)^{M}\, t^{(L)}_{M}(p)$$

et

$$\sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & L & j \\ j & -M & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}} = \bar{t}^{(L)}_{-M}(p)$$

ont la même loi de transformation (2.9). On montre leur égalité en utilisant la condition d'hermiticité $\bar{\rho}(p)^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} = \rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}}$ et des propriétés de symétrie des symboles 3-j.

(3) Le fait que la matrice densité soit définie positive entraîne des restrictions supplémentaires[4] pour les paramètres multipolaires $t^{(L)}_{M}(p)$. En particulier,

$$\mathrm{tr}\ \rho^2(p) \leq \mathrm{tr}\ \rho(p) \tag{2.13}$$

implique l'inégalité

$$\sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^{L} (2L+1) \left| t^{(L)}_{M}(p) \right|^2 \leq 2j+1 \quad . \tag{2.14}$$

En effet,

$$\mathrm{tr}\ \rho^2(p) = \frac{(-1)^{2j}}{2j+1} \sum_{L,M} \sum_{L',M'} (2L+1)(2L'+1)\ \bar{t}^{(L)}_{M}(p) t^{(L')}_{M'}(p).$$

$$\sum_{\tilde{\lambda},\lambda} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & \lambda & j \\ L' & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{2j+1} \sum_{L,M} (2L+1) \left| t^{(L)}_{M}(p) \right|^2 \quad ;$$

résultat qui porté dans (2.13) entraîne (2.14).

D'autres restrictions pour les $t^{(L)}_{M}$ apparaissent lorsqu'on tient compte des symétries dans le processus de production. Nous discuterons celles-ci dans le §6a.

L'ensemble des paramètres multipolaires $t^{(L)}_{M}(p)$ caractérise entièrement l'information qu'on a sur le système physique décrit par la matrice densité ρ. En fait, c'est le but principal des chapitres à suivre de discuter la façon de mesurer ces paramètres dans des réalisations physiques particulières. Pour le moment, nous allons nous limiter dans la suite de ce chapitre à l'analyse des propriétés formelles de ces paramètres et à leur interprétation physique.

§2b. DEVELOPPEMENT DE LA MATRICE DENSITE SUR UNE BASE D'OPERATEURS TENSORIELS IRREDUCTIBLES. DEGRE DE POLARISATION 2^L-POLAIRE. DEGRE DE POLARISATION.

L'opérateur polarisation W_μ associé à une particule d'énergie-impulsion p a été déjà défini dans le chapitre précédent. Par rapport à une tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$ et dans le 3-plan orthogonal à la direction $u = p/m$ nous allons choisir comme trièdre de base $\vec{s}$ celui qu'on obtient à partir de $\vec{n}$ par la transformation de Lorentz pure $\Lambda_{t\to u}$ [voir (1.70)]. Les projections de l'opérateur W sur ce trièdre sont les composantes de l'opérateur de spin

$$\vec{S}_p = -\frac{1}{m} W.\vec{s} \quad . \tag{2.15a}$$

Nous pouvons aussi introduire une base sphérique de composantes

$$Y^{(1)}_M(\vec{s}_\alpha) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (s^{(1)}_\alpha - i s^{(2)}_\alpha) & \text{pour } M = -1 \\ s^{(3)}_\alpha & \text{pour } M = 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} (s^{(1)}_\alpha + i s^{(2)}_\alpha) & \text{pour } M = 1 \end{cases} , \tag{2.16}$$

et définir la projection de l'opérateur W sur cette base :

$$Y^{(1)}_M(\vec{S}_p) = -\frac{1}{m} W^\alpha Y^{(1)}_M(\vec{s}_\alpha) \quad . \tag{2.15b}$$

L'opérateur ainsi construit est un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 1. En effet,

$$U(\Lambda)\, Y^{(1)}_M(\vec{S}_p)\, U^{-1}(\Lambda) = -\frac{1}{m} (\Lambda^{-1}W)^\alpha Y^{(1)}_M(\vec{s}_\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{m} W^\alpha Y^{(1)}_M[(\Lambda\vec{s})_\alpha] \quad , \tag{2.17}$$

mais puisque $\Lambda = \Lambda_{t\to\Lambda u} R(u.\Lambda)\Lambda^{-1}_{t\to u}$ [voir (1.44)] et $\vec{s} = \Lambda_{t\to u}\vec{n}$, le terme de droite dans (2.17) peut aussi s'écrire sous la forme

$$-\frac{1}{m} (\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u} W)^\alpha Y^{(1)}_M [(R(u,\Lambda)\vec{n})_\alpha] \quad .$$

En outre

$$Y^{(1)}_{M}[(R(u,\Lambda)\vec{n}] = D^{(1)}[R_{ij}(u,\Lambda)]^{M'}_{M}\, Y^{(1)}_{M'}(\vec{n}) \quad ,$$

avec

$$R_{ij}(u,\Lambda) = -\Lambda_{t\to\Lambda u}\, n^{(i)}.\Lambda\Lambda_{t\to u}\, n^{(j)}, \quad i,j = 1,2,3 \; . \qquad (1.45)$$

En tenant compte de ces résultats on arrive à la loi de transformation suivante

$$U(\Lambda)\, Y^{(1)}_{M}\,(\vec{S}_p)\, U^{-1}(\Lambda) = D^{(1)}[R_{ij}(u,\Lambda)]^{M'}_{M}\, Y^{(1)}_{M'}\,(\vec{S}_{\Lambda p}) \qquad (2.18)$$

avec

$$Y^{(1)}_{M}(\vec{S}_{\Lambda p}) = -\frac{1}{m} W^{\alpha}\, Y^{(1)}_{M}[(\Lambda_{t\to\Lambda u}\, \vec{n})_{\alpha}] \; .$$

L'expression (2.18) est la généralisation relativiste de la loi de transformation d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 1.

D'une façon générale, les (2L+1) composantes d'un <u>opérateur tensoriel irréductible d'ordre L</u> construites à partir de l'opérateur $\vec{S}_p$ sont données de la manière suivante[5] :

$$Y^{(L)}_{M}(\vec{S}_p) = (-\frac{1}{m})^{L} W^{\alpha_1} W^{\alpha_2} \ldots W^{\alpha_L}\, Y^{(L)}_{M}\,(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \ldots, \vec{s}_{\alpha_L}), \qquad (2.19)$$

où les fonctions $Y^{(L)}_{M}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \ldots, \vec{s}_{\alpha_L})$ sont des tenseurs d'ordre L complètement symétriques construits à partir de $Y^{(L)}_{M}(\vec{s})$ par symétrisation des produits des composantes $s^{(i)}$ i = 1, 2, 3. Par exemple,

$$Y^{(2)}_{1}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,(s^{(3)}_{\alpha_1} s^{(1)}_{\alpha_2} + s^{(1)}_{\alpha_1} s^{(3)}_{\alpha_2} + i s^{(3)}_{\alpha_1} s^{(2)}_{\alpha_2} + i s^{(2)}_{\alpha_1} s^{(3)}_{\alpha_2})$$

$$Y^{(3)}_{o}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \vec{s}_{\alpha_3}) = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{7}{\pi}}\,(6 s^{(3)}_{\alpha_1} s^{(3)}_{\alpha_2} s^{(3)}_{\alpha_3} - 3 s^{(2)}_{\alpha_1} s^{(2)}_{\alpha_2} s^{(3)}_{\alpha_3} -$$

$$- 3 s^{(2)}_{\alpha_1} s^{(3)}_{\alpha_2} s^{(2)}_{\alpha_3} - 3 s^{(3)}_{\alpha_1} s^{(2)}_{\alpha_2} s^{(2)}_{\alpha_3} - 3 s^{(1)}_{\alpha_1} s^{(1)}_{\alpha_2} s^{(3)}_{\alpha_3} - 3 s^{(1)}_{\alpha_1} s^{(3)}_{\alpha_2} s^{(1)}_{\alpha_3}$$

$$- 3 s^{(3)}_{\alpha_1} s^{(1)}_{\alpha_2} s^{(1)}_{\alpha_3}) \; .$$

Les opérateurs $Y^{(L)}_{M}(\vec{S}_p)$ ainsi construits ont la loi de transformation

$$U(\Lambda)\ Y^{(L)}_{M}(\vec{S}_p)\ U^{-1}(\Lambda) = D^{(L)}[R_{ij}(u,\Lambda)]^{M'}_{M}\ Y^{(L)}_{M'}(\vec{S}_{\Lambda p}) \quad , \quad (2.20)$$

et leurs éléments de matrice dans la base canonique $|p,j\lambda>$ s'expriment d'après le théorème de Wigner-Eckart[6] par la relation

$$<p,j\lambda|Y^{(L)}_{M}(\vec{S}_p)|p,j\tilde{\lambda}> = \sqrt{2j+1}\begin{pmatrix}\lambda & L & j\\ j & M & \tilde{\lambda}\end{pmatrix}<p,j\|Y^{(L)}(\vec{S}_p)\|p,j> \quad , \quad (2.21)$$

où les éléments de matrice réduits $<p,j\|Y^{(L)}(\vec{S}_p)\|p,j>$, ont d'après (2.20) la propriété d'être invariants relativistes ; c'est-à-dire,

$$<p,j\|Y^{(L)}(\vec{S}_p)\|p,j> = <\Lambda p,j\|Y^{(L)}(\vec{S}_{\Lambda p})\|\Lambda p,j> \quad (2.22)$$

Considérons ensuite les opérateurs suivants :

$$T^{(L)*}_{M}(p) = (<p,j\|Y^{(L)}(\vec{S}_p)\|p,j>)^{-1}\ Y^{(L)}_{M}(\vec{S}_p) \quad . \quad (2.23)$$

Le théorème de Wigner-Eckart nous montre d'après (2.21) qu'il est possible d'exprimer les éléments de matrice de ces opérateurs entre les états à une particule en fonction des symboles 3-j (voir table 2.1) :

$$<p,j\lambda|T^{(L)*}_{M}(p)|p,j\tilde{\lambda}> = \sqrt{2j+1}\begin{pmatrix}\lambda & L & j\\ j & M & \tilde{\lambda}\end{pmatrix} \quad . \quad (2.24)$$

Dans cette base d'états à une particule on calcule facilement les relations d'orthonormalité entre les opérateurs $T^{(L)}_{M}(\rho)$,

$$tr\ (T^{(L')}_{M'}(p)\ T^{(L)*}_{M}(p)) = \frac{2j+1}{2L+1}\ \delta_{LL'}\ \delta_{MM'} \quad (2.25)$$

avec $0 \leq L, L' \leq 2j$ et $-L \leq M \leq L$; $-L' \leq M' \leq L'$.

L'équation (2.24) nous montre que les opérateurs tensoriels irréductibles forment une base complète pour l'opérateur matrice densité

décrivant un mélange de particules d'énergie-impulsion p et spin j. Les coefficients du développement de la matrice densité sur cette base ne sont autres que les paramètres pultipolaires $\bar{t}^{(L)}_{M}(p)$ définis par l'égalité (2.8) :

$$\rho(p) = \frac{1}{2j+1} \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^{L} (2L+1) \bar{t}^{(L)}_{M}(p) T^{(L)}_{M}(p) \quad ; \quad (2.26)$$

les $\bar{t}^{(L)}_{M}$ sont donnés d'autre part par la relation

$$\bar{t}^{(L)}_{M}(p) = tr\ (\rho\ T^{(L)*}_{M}(p)) \ . \quad (2.27)$$

L'expression (2.26) peut aussi s'exprimer sous une forme explicitement covariante en utilisant les définitions (2.19) et (2.23).
On arrive ainsi au résultat suivant :

$$\rho = \frac{1}{2j+1} + \sum_{L=1}^{2j} \left(\frac{-1}{m}\right)^{L} W^{\alpha_1} W^{\alpha_2} \ldots W^{\alpha_L} \sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_L} =$$

$$= \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{m} W^{\alpha}\sigma_{\alpha} + \frac{1}{m^2} W^{\alpha}W^{\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^3} W^{\alpha}W^{\beta}W^{\gamma}\sigma_{\alpha\beta\gamma} + \ldots \ , \quad (2.28)$$

avec

$$\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_L} = \frac{2L+1}{2j+1} \sum_{M=-L}^{L} t^{(L)}_{M}(p) \frac{Y^{(L)}_{M}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \ldots, \vec{s}_{\alpha_L})}{\langle p,j \| Y^{(L)}(\vec{S}_p) \| p,j \rangle} \ . \quad (2.29)$$

D'après ces relations nous voyons qu'il est également possible de prendre comme ensemble de paramètres pour décrire la matrice densité ρ les composantes des tenseurs σ_{α}, $\sigma_{\alpha\beta}, \ldots, \sigma_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2j}}$. Le lien entre ces derniers et les paramètres multipolaires $t^{(L)}_{M}(p)$ est donné par la formule (2.29). D'après cette formule, les tenseurs $\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2j}}$ ont les propriétés suivantes :

1. Ils sont complètement symétriques

$$\sigma_{\ldots\alpha_i\ldots\alpha_k\ldots} = \sigma_{\ldots\alpha_k\ldots\alpha_i\ldots}, \ \forall\ i,k \in (1,2,\ldots,L). \quad (2.30)$$

2. Ils sont orthogonaux à l'énergie impulsion p

$$\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots\alpha_L} p^{\alpha_i} = 0 \ , \quad \forall\ i \in (1,2,\ldots,L) \ . \tag{2.31}$$

3. Ils s'annulent par contraction de deux indices répétés :

$$\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots}{}^{\alpha_i}{}_{\ldots\alpha_L} = 0, \quad \forall\ i \in (1,2,\ldots,L) \ . \tag{2.32}$$

Les $2j$ scalaires $\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_L}\sigma^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_L}$, d'après la formule (2.29), sont égaux aux quantités

$$\sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_L}\sigma^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_L} = C(L,j) \sum_{M=-L}^{L} |t_M^{(L)}(p)|^2 \ . \tag{2.33}$$

avec

$$C(L,j) = \left(\frac{2L+1}{2j+1}\right)^2 \frac{Y_0^{(L)}(\vec{s}_{\alpha_1},\ldots,\vec{s}_{\alpha_L})\ Y_0^{(L)}(\vec{s}^{\alpha_1},\ldots,\vec{s}^{\alpha_L})}{(\langle p,j\|Y^{(L)}(\vec{S}_p)\|p,j\rangle)^2} \ . \tag{2.34}$$

Pour trouver les valeurs explicites des éléments de matrice réduits, il suffit de particulariser la formule (2.21) au cas M = 0 et calculer pour chaque valeur de $L \in (0,1,\ldots,2j)$ les quantités

$$\frac{\langle p,j\lambda|Y_0^{(L)}(\vec{S}_p)|p,j\lambda\rangle}{\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix}\lambda & L & j\\ j & 0 & \lambda\end{pmatrix}} = \langle p,j\|Y^{(L)}(\vec{S}_p)\|p,j\rangle \ . \tag{2.35}$$

Par exemple, dans le cas où L = 1 on trouve

$$\langle p,j\|Y^{(1)}(\vec{S}_p)\|p,j\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\ \sqrt{j(j+1)} \tag{2.36}$$

et

$$C(1,j) = \frac{-9}{(2j+1)^2(j+1)j} \ ; \tag{2.37}$$

dans le cas où L = 2 on a

$$\langle p,j\|Y^{(2)}(\vec{S}_p)\|p,j\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\sqrt{(2j+3)(2j-1)(j+1)j} \qquad (2.38)$$

et

$$C(2,j) = \frac{150}{(2j+1)^2(2j+3)(2j-1)(j+1)j} \quad . \qquad (2.39)$$

Nous appellerons <u>degré de polarisation 2^L-polaire</u> la quantité

$$\delta^{(L)} = [(-1)^L \sigma_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_L} \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_L}]^{1/2} \quad . \qquad (2.40)$$

Lorsqu'on a $\delta^{(L)} = 0$ pour tout $L \in (1,2,\ldots,2j)$ nous dirons que le système n'est pas polarisé. La matrice densité est alors proportionnelle à la matrice unité. Parfois dans la littérature[7] on utilise la nomenclature suivante : on dit que le système est <u>polarisé</u> s'il y a au moins un $\delta^{(L)} \neq 0$ pour L impair ; et on dit que le système est <u>aligné</u> lorsqu'il y a au moins un $\delta^{(L)} \neq 0$ pour L pair et $\delta^{(L)} = 0$ pour tout L impair. En général, on dit qu'un système est <u>orienté</u> dès qu'un des $\delta^{(L)}$ pour $L \neq 0$ est différent de zéro, quelle que soit la parité de L.

Le <u>degré de polarisation</u> δ est donné, d'après Fano[52], par l'expression

$$\delta^2 = [\mathrm{tr}\,\rho^2 - \frac{1}{2j+1}]\frac{2j+1}{2j} \quad . \qquad (2.41)$$

Pour un état pur $\delta = 1$; pour une distribution uniforme sur tous les états, $\delta = 0$. L'expression de δ en fonction des paramètres-multipolaires $t^{(L)}_M$ est la suivante

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2j}}\left[\sum_{L=1}^{2j}(2L+1)\sum_{M=-L}^{L}|t^{(L)}_M|^2\right]^{1/2} \quad . \qquad (2.42)$$

Parfois il est intéressant d'utiliser le degré de polarisation polaire δ_o défini par l'expression

$$\delta_o = \frac{1}{\sqrt{2j}} \left[\sum_{L=1}^{2j} (2L+1)(t_o^{(L)})^2 \right]^{1/2} . \qquad (2.43)$$

Nous allons conclure ce chapitre avec la discussion d'une classe particulière de systèmes physiques décrits par une matrice densité : ceux pour lesquels il existe un axe de symétrie. Dans ce cas, nous choisirons comme axe de quantification précisément l'axe de symétrie. Dans le système au repos ($t = p/m$) les éléments de matrice $\rho^{\lambda}_{\lambda'}$ (voir (2.3)) sont alors invariants par rapport aux rotations autour de l'axe de quantification

$$\rho^{\lambda}_{\lambda'} = e^{i\varphi(\lambda'-\lambda)} \, \delta_{\lambda,\tilde{\lambda}} \, \delta_{\lambda',\tilde{\lambda}'} \, \rho^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{\lambda}'} \quad ;$$

c'est-à-dire que $\rho^{\lambda}_{\lambda'}$ est diagonal

$$\rho^{\lambda}_{\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \, c_{\lambda}$$

et d'après (2.8), seuls les paramètres multipolaires $t_o^{(L)}$ peuvent être non-nuls

$$\bar{t}_M^{(L)} = \delta_{M,0} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & o & \lambda \end{pmatrix} c_{\lambda} \quad .$$

Cette dernière relation permet d'obtenir une borne supérieure explicite pour les degrés de polarisation $\delta^{(L)}$. En effet, d'après (2.33) et (2.40) on a dans ce cas

$$\delta^{(L)} = \sqrt{(-1)^L \, C(L,j)} \; | t_o^{(L)} | \leq$$

$$\sqrt{(-1)^L (2j+1) \, C(L,j)} \sum_{\lambda} c_{\lambda} \left| \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \right| ,$$

et puisque $c_\lambda \geq 0$ et $\sum_\lambda c_\lambda = 1$,

$$\delta^{(L)} \leq \left\{ (-1)^L (2j+1) C(Lj) \quad \underset{\lambda \in (-j,\ldots,j)}{\text{Max}} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}^2 \right\}^{1/2} \qquad (2.44)$$

En particulier, pour L = 1 on trouve

$$\delta^{(1)} \leq \frac{3}{2j+1} \frac{1}{j+1} \quad ; \qquad (2.45)$$

pour L = 2 on a

$$\delta^{(2)} \leq \frac{10}{(2j+1)(2j+3)(2j-1)(j+1)j} \underset{\lambda \in (-j,\ldots,j)}{\text{Max}} \left| 3\lambda^2 - j(j+1) \right| . \qquad (2.46)$$

Notons que, bien que (2.44) soit une expression particulière aux systèmes possèdant un axe de symétrie, la borne (2.45) de $\delta^{(1)}$ est un résultat complètement général. En effet, il suffit de se placer dans le système de référence où la composante $s^{(3)}_\alpha$ est parallèle à la direction de polarisation σ_α pour qu'on ait $t^{(1)}_{\pm 1}(p) = 0$. Puisque $\rho(p)^\lambda{}_\lambda \geq 0$ et $\sum_\lambda \rho(p)^\lambda{}_\lambda = 1$, nous pouvons encore appliquer la majoration précédente qui permet de trouver le résultat (2.45).

Notons encore que pour les système physiques possèdant un axe de symétrie, le degré de polarisation δ coïncide avec le degré de polarisation polaire δ_o.

- - - - -

N O T E S

(Chapitre II)

(1) Pour une introduction à l'étude de la matrice densité de spin voir le chapitre V de Dirac [58]. L'article classique pour des applications à la physique nucléaire est celui de Fano [57].

(2) Voir Michel [59].

(3) Notons que, avec la normalisation (1.72), on devrait choisir $t_{o}^{(o)}(p) = 2|p_o|\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$. Nous faisons un abus de language en appellant "unité" la mesure invariante $2|p_o|\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$

(4) A notre connaissance ces restrictions n'ont pas été exploitées d'une façon complète. Williams [64] a réussi à les exprimer en fonction des traces de puissances de ρ. Malheureusement, le passage aux paramètres multipolaires introduit des expressions algébriquement trop compliquées. Néanmoins, pour $j = 1$, voir Zwanziger [64]. Voir aussi Minnaert [65].

(5) Voir Henry et de Rafael [65].

(6) Voir par exemple le chapitre 23 du livre de Wigner [59].

(7) Voir par exemple Fraunfelder et al. [65].

- - - - - - -

T A B L E 2.1

Eléments de matrice $(T^{(L)}_{M})^{*\lambda}_{\tilde{\lambda}} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & M & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}$, pour $j = \frac{1}{2}$ et $L = 1$

$j = 1$ et $L = 1,2$; $j = 3/2$ et $L = 1,2,3$. (Voir formule 2.24).

$j = 1/2$, $L = 1$

$$(T^{(1)}_{o}) = 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (T^{(1)}_{1}) = -1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$j = 1$, $L = 1,2$.

$$(T^{(1)}_{o}) = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (T^{(1)}_{1}) = -1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^{(2)}_{o}) = 1/\sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (T^{(2)}_{1}) = \frac{1}{2}\sqrt{3/5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^{(2)}_{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{3/5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

j = 3/2 , L = 1, 2, 3.

$$(T^{(1)}_{o}) = 1/\sqrt{15}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad (T^{(1)}_{1}) = -\sqrt{2/15}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^{(2)}_{o}) = 1/\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (T^{(2)}_{1}) = -\sqrt{2/5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^{(2)}_{2}) = \sqrt{2/5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^{(3)}_{o}) = -1/\sqrt{35}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (T^{(3)}_{1}) = \sqrt{4/35}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^{(3)}_{2}) = -\sqrt{2/7}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (T^{(3)}_{3}) = \sqrt{4/7}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P R E M I E R E P A R T I E

CINEMATIQUE RELATIVISTE DES FONCTIONS DE VERTEX. APPLICATIONS.

I N T R O D U C T I O N

Par fonction de vertex nous entendons la valeur moyenne d'un opérateur densité de courant entre les états physiques à une particule. Dans la représentation de Heisenberg elle est décrite par l'expression

$$\langle p', j'\lambda' | j^{\alpha}(x) | p, j\lambda \rangle \quad , \tag{I.1}$$

où l'indice α indique les composantes de l'opérateur densité de courant et $|p,j\lambda\rangle$, $|p',j'\lambda'\rangle$ sont des états à une particule d'énergie-impulsion p,p' ; spin j,j' et nombre quantique magnétique λ, λ' (voir (1.68a,b,c,d)).

L'invariance d'une fonction de vertex par les translations d'espace-temps s'exprime ainsi

$$\langle p', j'\lambda' | j^{\alpha}(x) | p, j\lambda \rangle = \langle p', j'\lambda' | U^{-1}(I,a) j^{\alpha}(x+a) U(I,a) | p, j\lambda \rangle \ ;$$

en particulier pour $a = -x$, on déduit en tenant compte de la loi de transformation des états (1.71),

$$\langle p', j'\lambda' | j^{\alpha}(x) | p, j\lambda \rangle = e^{i(p'-p)\,x} \langle p', j'\lambda' | j^{\alpha}(0) | p, j\lambda \rangle . \tag{I.2}$$

Cette relation permet de nous limiter à l'étude des fonctions de vertex à l'origine d'espace-temps. La quantité

$$q = p' - p \tag{I.3}$$

est l'énergie-impulsion de transfert du vertex et son carré q^2 est la seule variable scalaire dont dépende le vertex .

A l'heure actuelle, plusieurs modèles phénoménologiques de processus de diffusion consistent essentiellement à factoriser la matrice S sous forme de produit de fonctions de vertex. C'est le cas, par exemple, dans le calcul de la structure électromagnétique du nucléon, au premier ordre dans le couplage électromagnétique mais en tenant compte des effets d'interaction forte à tous les ordres. C'est aussi le cas dans les interactions faibles lorsqu'on calcule l'amplitude de transition des désintégrations leptoniques des particules hadroniques. C'est encore le cas dans de nombreux processus de diffusion en physique des couplages forts où, à une bonne approximation, les modèles périphériques[(1)] sont valables. Dans ces modèles, toute la structure dynamique du processus est réduite à la connaissance des fonctions de vertex.

Dans le cas où l'état initial et l'état final dans (I.1) correspondent à des particules scalaires et où l'opérateur densité de courant est un scalaire,

$$(\Box + m^2)\,\varphi(x) = j(x) \quad ,$$

on a

$$\langle p' | j(0) | p \rangle \equiv V(q^2) \quad ,$$

et le vertex est alors décrit simplement par une fonction scalaire de q^2 dont la forme explicite dépend de la dynamique du type de couplage des trois champs scalaires.

En général, pour des particules avec spin nous aurons une fonction à plusieurs composantes pour décrire le vertex

$$\langle p', j'\lambda' | j^{\alpha}(0) | p, j\lambda \rangle \equiv V^{\alpha}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad . \qquad (I.4)$$

La conservation de la parité dans le processus décrit par le vertex implique des restrictions sur ces composantes ; de même l'invariance par renversement du mouvement. Il est intéressant d'obtenir ces restrictions d'une façon systématique et de les énoncer sous forme de règles de sélection. Ceci fait l'objet du chapitre III.

Dans le chapitre IV nous étudions le développement des composantes $V^{\alpha}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ en fonctions invariantes relativistes de q^2 -facteurs de forme multipolaires-. Nous obtenons ainsi des expressions phénoménologiques rigoureuses pour n'importe quel vertex déduites uniquement du principe d'invariance relativiste.

Quelques résultats des chapitres III et IV sont déjà bien connus ; énoncés peut-être sous forme différente[2]. Dans cette premiere partie nous avons essayé de déduire les propriétés cinématiques des vertex en utilisant une technique qui nous semble fort pratique dans le but d'obtenir des formules générales. C'est la même technique qui sera utilisée dans les autres parties.

- - - - - - -

N O T E S

(Introduction 1ère Partie)

(1) Un modèle d'échange d'un pion pour décrire la réaction $\pi + p \rightarrow \pi + \pi + N$ a été introduit par Chew et Low [59]. La généralisation de ce modèle à d'autres processus a été suggérée simultanément par plusieurs auteurs : Drell [60],[61] ; Salzman et Salzman [60a], [60b] ; Ferrari et Selleri [62]. Des raffinements du modèle périphérique (simple échange d'une particule) ont été proposés par : Sopkovich [62] ; Gottfried et Jackson [64] ; Durand et Chiu [64a], [64b] et [65] ; Ross et Show [64]. Pour une revue des contributions récentes voir Jackson [65b].

(2) Voir notamment l'article de Durand, De Celles et Marr [62], voir aussi F.J. Ernst, R.G. Sachs et K.C. Wali [60].

- - - - - - -

C H A P I T R E III

LES REGLES DE SELECTION DANS UN VERTEX. APPLICATIONS

Le but de ce chapitre est d'obtenir les règles de sélection qu'on doit imposer aux fonctions de vertex décrivant des processus invariants par rapport aux symétries d'espace-temps : inversion d'espace (parité), et renversement du mouvement. Nous montrerons à partir des lois générales de transformation des états et de l'opérateur densité de courant comment ces règles s'énoncent. On considérera d'abord les cas où l'opérateur densité de courant est un opérateur scalaire ou pseudoscalaire, vectoriel ou pseudovectoriel, (voir l'Enoncé 1 dans le §3a et l'Enoncé 2 dans le §3b). Les éléments de matrice d'un vertex dans l'espace des polarisations sont alors donnés explicitement pour plusieurs types de couplage (voir table 3.1 et table 3.2). Ensuite nous généralisons les discussions précédentes au cas d'un opérateur densité de courant ayant la loi de transformation d'un champ de spin s quelconque. Le formalisme à 2s + 1 composantes rend convenable cette discussion. Les résultats correspondants sont donnés dans l'Enoncé 3 et l'Enoncé 4.

§3a. APPLICATION DU THEOREME DE BOHR AUX FONCTIONS DE VERTEX. (INVARIANCE PAR PARITE). ENONCE 1. EXEMPLES.

Considérons le cas où l'opérateur densité de courant d'un vertex est un opérateur scalaire ou pseudoscalaire $j(x)$; ou un opérateur vectoriel ou axial $j^{\mu}(x)$, et voyons quelles sont les règles de sélection qui expriment la conservation de la parité dans les vertex décrits par des fonctions du type

$$V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \equiv \langle p',j'\lambda'|\, j(o)\,|p,j\lambda\rangle$$

ou

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \equiv \langle p',j'\lambda'|\, j^{\mu}(o)\,|p,j\lambda\rangle$$

pour des valeurs du spin des particules initiales et finales, j et j', arbitraires. Une réponse, particulièrement intéressante pour les applications, est celle donnée par une version du théorème de Bohr [59] adapté aux fonctions de vertex. Du point de vue géométrique, un vertex est un 2-plan orienté dans le temps -celui défini par les quadrivecteurs énergie-impulsion p et p' des particules réelles initiale et finale. Dans le 2-plan orthogonal au vertex, il est commode de fixer un quadrivecteur n comme axe commun de quantification du spin des particules d'énergie-impulsion p et p' :

$$n.p = 0 \qquad \text{et} \qquad n.p' = 0 \quad , \tag{3.1a,b}$$

avec

$$n^2 = -1 \quad . \tag{3.2}$$

La méthode de Bohr consiste à étudier l'invariance du système par l'opération

$$\Sigma_n = 1 + 2\, n \otimes n \quad ; \tag{3.3}$$

c'est-à-dire, l'opération de symétrie pour l'hyperplan orthogonal à n. Notons que, par rapport à une tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$, avec

$n^{(3)} \equiv n$, on peut aussi écrire (3.3) sous la forme[1]

$$\Sigma_n = R_n(\pi)P \quad , \tag{3.4}$$

où P est l'opération parité, et $R_n(\pi)$ une rotation d'angle π autour de l'axe n. En tenant compte de cette relation, la loi de transformation des états à une particule induite par Σ_n, est alors [voir (1.71) et (1.76)]

$$U(\Sigma_n)|p,j\lambda> = U(R_n(\pi))U(P)|p,j\lambda> = (-1)^{\lambda} \in |p,j\lambda> \ . \tag{3.5}$$

La loi de transformation correspondante pour l'opérateur densité de courant dépend des propriétés spinnorielles de celle-ci :

a) pour un opérateur scalaire ou pseudoscalaire,

$$U(\Sigma_n)\ j\ (0)\ U^{-1}(\Sigma_n) = \eta\ j(0) \tag{3.6}$$

avec $\eta = +1$ (scalaire), $\eta = -1$ (pseudocalaire) ;

b) pour un opérateur vectoriel ou pseudovectoriel $j^{\alpha,\beta}(0)$ $(\alpha,\beta = \mp 1)^{(2)}$,

$$U(\Sigma_n)\ j^{\alpha,\beta}(0)\ U^{-1}(\Sigma_n) = -\eta\ j^{-\beta,-\alpha}(0), \tag{3.7}$$

avec $\eta = -1$ (vecteur), $\eta = +1$ (pseudovecteur).

Dans ces cas, l'invariance des fonctions de vertex par rapport à Σ_n s'exprime donc ainsi,

$$V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \eta\ \varepsilon\ \varepsilon'(-1)^{\lambda-\lambda'}V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \ ;$$

et

$$V^{\alpha,\beta}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = <p',j'\lambda'|\ j^{\alpha,\beta}(0)|p,j\lambda> =$$

$$= -\eta\ \varepsilon\ \bar{\varepsilon}'(-1)^{\lambda-\lambda'}\ V^{-\beta,-\alpha}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad ; \tag{3.8}$$

d'où les règles de sélection suivantes :

Enoncé 1.

L'invariance du vertex par rapport à la réflexion Σ_n (voir (3.3) et (3.4) implique :

a) Dans les cas d'un courant scalaire ($\eta = 1$) ou pseudo-scalaire ($\eta = -1$), seuls les éléments de matrice $V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ tels que

$$\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda-\lambda'} = 1 \quad , \tag{3.9}$$

où $\lambda' = -j', \ldots, j'$; $\lambda = -j, \ldots, j$, peuvent être non nuls.

b) Dans les cas d'un courant vectoriel ($\eta = -1$) ou pseudo-vectoriel ($\eta = +1$), seuls les éléments de matrice $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ tels que

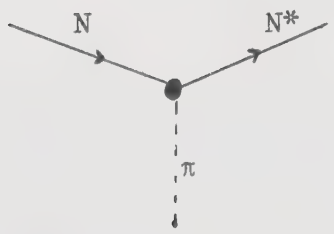
$$\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda-\lambda'} = -1, \text{ pour } \mu = 0,1,2 \tag{3.10a}$$

$$\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda-\lambda'} = +1, \text{ pour } \mu = 3 \text{ (correspondant à la direction de quantification)} \tag{3.10b}$$

où $\lambda' = -j', \ldots, j'$; $\lambda = -j, \ldots, j$, peuvent être non nuls.

Ces règles sélectionnent certains des éléments de la matrice représentative du vertex dans l'espace des poralisations selon que la valeur de la parité intrinsèque du vertex est ± 1. Nous allons voir ceci dans quelques exemples :

1) $N + \pi$ (virtuel) $\rightarrow N^*_{3/2}$.

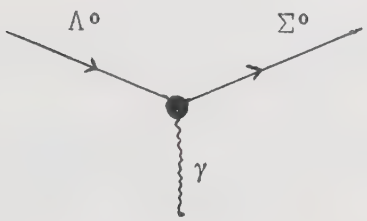


Dans ce cas on a $\eta\ \varepsilon\ \bar{\varepsilon}' = -1$ et, d'après la relation (3.9), $(-1)^{\lambda-\lambda'} = -1$.
La matrice $V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ dans l'espace des polarisations s'écrit :

$\lambda = -1/2, \quad \lambda = 1/2$

$$\begin{array}{l} \lambda' = -3/2 \\ \lambda' = -1/2 \\ \lambda' = 1/2 \\ \lambda' = 3/2 \end{array} \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \\ & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

2) **Production de Σ^o par excitation coulombienne de Λ^o .**

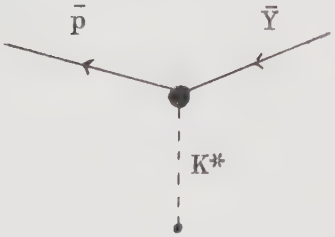


C'est un exemple d'application de la règle (3.10a),

$(-1)^{\lambda-\lambda'}$ = parité relative $\Sigma - \Lambda$. (3.12)

Cette relation implique que le Σ^o et le Λ^o ont des polarisations parallèles à un même axe orthogonal au vertex ; ces polarisations sont de même signe ou de signe contraire selon la parité relative $\Sigma - \Lambda$. (Nous avons traité ce cas explicitement ailleurs, de Rafael [62]).

3) $\bar{p} \rightarrow \bar{Y} + K^*$ (virtuel)



Le K* est une particule vectorielle ($\eta\ \varepsilon\bar{\varepsilon}' = -1$). Nous appliquons donc les règles (3.10a,b). Chaque composante du vertex ($\mu = 0,1,2,3$) est une matrice 2 x 2 qui, dans l'espace des polarisations, s'écrit :

$$
\begin{array}{c}
\qquad\quad \lambda=-\frac{1}{2} \quad \lambda=\frac{1}{2} \;;\; \lambda=-\frac{1}{2} \quad \lambda=\frac{1}{2} \;;\; \lambda=-\frac{1}{2} \quad \lambda=\frac{1}{2} \;;\; \lambda=-\frac{1}{2} \quad \lambda=\frac{1}{2} \\
\begin{matrix} \lambda'=-\frac{1}{2} \\ \lambda'=\frac{1}{2} \end{matrix} \left\{ \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
\qquad\quad \mu=0 \qquad\qquad \mu=1 \qquad\qquad \mu=2 \qquad\qquad \mu=3
\end{array}
\tag{3.13}
$$

Nous reviendrons plus tard sur ces exemples.

§3b. INVARIANCE PAR RENVERSEMENT DU MOUVEMENT ENONCE 2. EXEMPLES.

Tout en restant dans les cas particuliers d'un courant scalaire ou pseudoscalaire, ou d'un courant vectoriel ou axial, nous allons étendre la méthode du paragraphe précédent à l'étude de l'invariance du vertex par renversement du mouvement.

Nous étudierons l'invariance du système par rapport au produit d'opérations

$$\Pi_t = R_n(\pi)\Sigma_t \quad , \tag{3.14}$$

où $R_n(\pi)$ est une rotation de π autour de l'axe n et Σ_t l'opération inversion de temps

$$\Sigma_t = 1 - 2\, t \otimes t \quad . \tag{3.15}$$

L'opérateur $U(\Sigma_t)$ étant antiunitaire (Wigner [59] Ch. 26 ; voir aussi Bargmann [64b]), l'invariance du vertex par rapport à Π_t s'exprime ainsi

$$V^{\alpha,\beta}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \langle p',j'\lambda' | U^{-1}(\Pi_t)U(\Pi_t) j^{\alpha,\beta}(o) U^{-1}(\Pi_t)U(\Pi_t) | p,j\lambda\rangle \quad . \tag{3.16}$$

D'après le relations (1.71) et (1.77) on a

$$U(\Pi_t)|p,j\lambda\rangle = U[R_n(\pi)]U(\Sigma_t)|p,j\lambda\rangle = (-1)^j |p,j-\lambda\rangle \quad ; \tag{3.17}$$

en ce qui concerne la transformation de $j^{\alpha,\beta}(0)$ par $U(\Pi_t)$ on a :

a) pour un opérateur scalaire ou pseudoscalaire,

$$U(\Pi_t)\; j(0)\; U^{-1}(\Pi_t) = j(0) \quad ; \tag{3.18}$$

b) pour un opérateur vectoriel ou pseudovectoriel,

$$U(\Pi_t)\; j^{\alpha,\beta}(0)\; U^{-1}(\Pi_t) = j^{-\beta,-\alpha}(0) \quad . \tag{3.19}$$

Ces résultats portés dans la relation (3.16) nous donnent les règles suivantes :

Enoncé 2

L'invariance du vertex par rapport à l'opération π_t (voir (3.14) et (3.15) implique :

a) Dans les cas d'un courant scalaire ou pseudoscalaire, les relations

$$\overline{V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'} V(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \quad ; \qquad (3.20)$$

$$(\lambda' = -j', \ldots, j' \quad ; \quad \lambda = -j, \ldots, j)$$

b) Dans les cas d'un courant vectoriel ou pseudovectoriel, les relations

$$\overline{V^{\alpha,\beta}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'} V^{-\beta,-\alpha}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \quad . \qquad (3.21)$$

$$(\lambda' = -j', \ldots, j' \quad ; \quad \lambda = -j, \ldots, j)$$

Ces dernières relations, exprimées pour chacune des composantes vectorielles ou pseudovectorielles $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, s'écrivent[2] : pour $\mu = 0,1,2$

$$\overline{V^{0,1,2}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'} V^{0,1,2}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \quad ; \qquad (3.22a)$$

pour $\mu = 3$ (composante sur la direction de quantification),

$$\overline{V^{3}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'+1} V^{3}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \quad . \qquad (3.22b)$$

Ces règles imposent certaines restrictions de réalité aux éléments de la matrice représentative du vertex dans l'espace des polarisations. A titre d'exemple nous allons les appliquer aux vertex (1), (2) et (3) discutés dans le §3a :

(1) $N + \pi(\text{virtuel}) \rightarrow N^*$.

Les relations (3.20) nous permettent de détailler d'avantage la structure de la matrice (3.11) :

$$\begin{array}{c|cc} & \lambda = -1/2, & \lambda = 1/2 \\ \hline \lambda' = -3/2 & -a & 0 \\ \lambda' = -1/2 & 0 & -b \\ \lambda' = 1/2 & \bar{b} & 0 \\ \lambda' = 3/2 & 0 & \bar{a} \end{array} \quad , \tag{3.23}$$

(2) $\Lambda^o + \gamma$ (coulombienne) $\rightarrow \Sigma^o$.

La parité ralative $\Sigma - \Lambda$ étant connu à l'heure actuelle[3],[4] $(= +1)$, la matrice représentant ce vertex dans l'espace des polarisations s'écrit :

$$\begin{array}{c|cc} & \lambda = -1/2 & \lambda = 1/2 \\ \hline \lambda' = -1/2 & a & 0 \\ \lambda' = 1/2 & 0 & \bar{a} \end{array} \quad , \tag{3.24}$$

(3) $\bar{p} \rightarrow \bar{Y} + K^*$ (virtuel)[5].

Nous appliquons ici les relations (3.22a,b). La matrice (3.13) s'écrit alors :

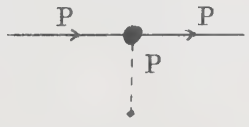
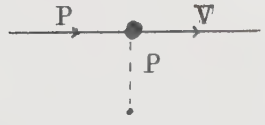
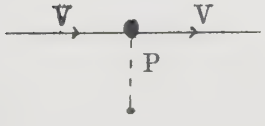
$$\begin{array}{c|cccc} & \lambda=-1/2,\ \lambda=1/2 & ; \quad \lambda=-1/2,\ \lambda=1/2 & ; \quad \lambda=-1/2,\ \lambda=1/2 & ; \quad \lambda=-1/2,\ \lambda=1/2 \\ \hline \lambda = -1/2 & a \quad 0 & b \quad 0 & c \quad 0 & 0 \quad d \\ \quad = 1/2 & 0 \quad \bar{a} & 0 \quad \bar{b} & 0 \quad \bar{c} & -\bar{d} \quad 0 \end{array} \ ; \tag{3.25}$$

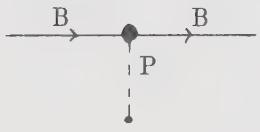
§3c. ELEMENTS DE MATRICE DANS L'ESPACE DES POLARISATIONS POUR LES VERTEX CORRESPONDANT A DES COURANTS PSEUDOSCALAIRES ET VECTORIELS.

A titre d'application des règles de sélection établies dans le §3a et le §3b, nous avons construit des tables des matrices représentatives d'un vertex dans l'espace des polarisations, correspondant à des particules hadroniques. Nous suivons des notations standards de la classification des particules par le groupe SU(3) :
P indique un meson appartenant à l'octet 0^- ;
V un meson 1^- ;
B un baryon $1/2^+$;
et B* un baryon du decuplet $3/2^+$.
Les diagrammes de la table 3.1 correspondent à des courants pseudoscalaires ; ceux de la table 3.2 à des courants vectoriels.

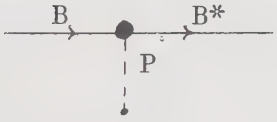
TABLE 3.1

Eléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants pseudoscalaires.

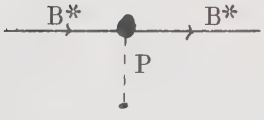
Diagramme	Matrice dans l'espace des polarisations : $V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$
	Interdit par conservation de parité
	$\lambda = 0$ $\lambda' = -1 \quad \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -\bar{a} \end{bmatrix}$ $\lambda' = 0$ $\lambda' = 1$
	$\lambda = -1 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = 1$ $\lambda' = -1 \quad \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & \bar{b} \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda' = 0$ $\lambda' = 1$



	$\lambda = -1/2$	$\lambda = 1/2$
$\lambda' = -1/2$	0	a
$\lambda' = 1/2$	$\bar{a}$	0



	$\lambda = -1/2$	$\lambda = 1/2$
$\lambda' = -3/2$	a	0
$\lambda' = -1/2$	0	b
$\lambda' = 1/2$	$-\bar{b}$	0
$\lambda' = 3/2$	0	$-\bar{a}$

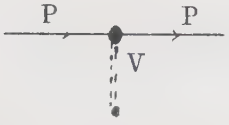


	$\lambda = -3/2$	$\lambda = -1/2$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 3/2$
$\lambda' = -3/2$	0	a	0	b
$\lambda' = -1/2$	c	0	d	0
$\lambda' = 1/2$	0	$\bar{d}$	0	$\bar{c}$
$\lambda' = 3/2$	$\bar{b}$	0	$\bar{a}$	0

T A B L E 3.2

Eléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants vectoriels.

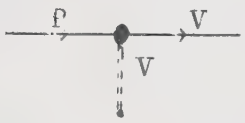
Diagramme — Matrice dans l'espace des polarisations : $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$



$a_{0,1,2}$; $a_3 = 0$

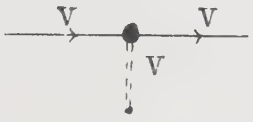
$\mu = 0,1,2$ $\quad$ $\mu = 3$

avec $\bar{a}_{\mu} = a_{\mu}$.



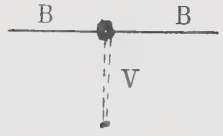
$$\begin{array}{c} \\ \lambda'=-1 \\ \lambda'=0 \\ \lambda'=1 \end{array} \begin{array}{c} \lambda=0 \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ a_{0,1,2} \\ 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \lambda'=-1 \\ \lambda'=0 \\ \lambda'=1 \end{array} \begin{array}{c} \lambda=0 \\ \left[\begin{array}{c} b_3 \\ 0 \\ \bar{b}_3 \end{array}\right] \end{array}$$

avec $\overline{a_{0,1,2}} = - a_{0,1,2}$ $\qquad$ $\mu = 0,1,2$ $\qquad$ $\mu = 3$



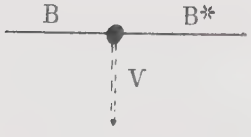
$$\begin{array}{c} \\ \lambda'=-1 \\ \lambda'=0 \\ \lambda'=1 \end{array} \begin{array}{c} \lambda=-1 \quad \lambda=0 \quad \lambda=1 \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{0,1,2} & 0 & b_{0,1,2} \\ 0 & c_{0,1,2} = \bar{c}_{0,1,2} & 0 \\ \bar{b}_{0,1,2} & 0 & \bar{a}_{0,1,2} \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \lambda'=-1 \\ \lambda'=0 \\ \lambda'=1 \end{array} \begin{array}{c} \lambda=-1 \quad \lambda=0 \quad \lambda=1 \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & a_3 & 0 \\ b_3 & 0 & -\bar{b}_3 \\ 0 & -\bar{a}_3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\mu = 0,\ 1,\ 2$ $\qquad$ $\mu = 3$



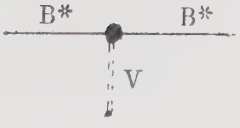
$$\begin{array}{c} \\ \lambda'=-\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{1}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda=-\tfrac{1}{2} & \lambda=\tfrac{1}{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{0,1,2} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{0,1,2} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \lambda'=-\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{1}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda=-\tfrac{1}{2} & \lambda=\tfrac{1}{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ -\bar{a}_3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mu = 0,1,2$ $\qquad$ $\mu = 3$



$$\begin{array}{c} \\ \lambda'=-\tfrac{3}{2} \\ \lambda'=-\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{3}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda=-\tfrac{1}{2}, & \lambda=\tfrac{1}{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & a_{0,1,2} \\ b_{0,1,2} & 0 \\ 0 & -\bar{b}_{0,1,2} \\ -\bar{a}_{0,1,2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \lambda'=-\tfrac{3}{2} \\ \lambda'=-\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{3}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda=-\tfrac{1}{2}, & \lambda=\tfrac{1}{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \\ \bar{b}_3 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mu = 0,1,2$ $\qquad$ $\mu = 3$



$$\begin{array}{c} \\ \lambda'=-\tfrac{3}{2} \\ \lambda'=-\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{1}{2} \\ \lambda'=\tfrac{3}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda=-\tfrac{3}{2} & \lambda=-\tfrac{1}{2} & \lambda=\tfrac{1}{2} & \lambda=\tfrac{3}{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{0,1,2} & 0 & b_{0,1,2} & 0 \\ 0 & c_{0,1,2} & 0 & d_{0,1,2} \\ \bar{d}_{0,1,2} & 0 & \bar{c}_{0,1,2} & 0 \\ 0 & \bar{b}_{0,1,2} & 0 & \bar{a}_{0,1,2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda=-\tfrac{3}{2} & \lambda=-\tfrac{1}{2} & \lambda=\tfrac{1}{2} & \lambda=\tfrac{3}{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & a_3 & 0 & b_3 \\ c_3 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & -\bar{d}_3 & 0 & -\bar{c}_3 \\ -\bar{b}_3 & 0 & -\bar{a}_3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mu = 0,1,2$ $\qquad$ $\mu = 3$

§3d. GENERALISATION AU CAS D'UN COURANT AYANT LA LOI DE TRANSFORMATION D'UN CHAMPS DE SPIN ARBITRAIRE.

ENONCE 3. ENONCE 4.

Nous allons maintenant généraliser les énoncés 1 et 2 au cas d'un vertex où l'opérateur densité de courant à la loi de transformation d'un champ de spin arbitraire.

Dans le formalisme à (2s + 1) composantes, et dans la représentation d'Heisenberg, on a pour un champ de spin s [6],

$$(\Box + m^2)\varphi^{\alpha}(x) = j^{\alpha}_{(s,o)}(x) \ , \ (\Box + m^2)\chi^{\alpha}(x) = j^{\alpha}_{(o,s)}(x). \quad (3.26a,b)$$

Les composantes $j^{\alpha}_{(s,o)}(x)$, $j^{\alpha}_{(o,s)}(x)$ ont la loi de transformation

$$U(a,\Lambda)j^{\alpha}_{(s,o)}(x)U^{-1}(a,\Lambda) = D^{(s,o)}(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\alpha'} j^{\alpha'}_{(s,o)}(\Lambda x + a), \quad (3.27a)$$

$$U(a,\Lambda)j^{\alpha}_{(o,s)}(x)U^{-1}(a,\Lambda) = D^{(o,s)}(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\alpha'} j^{\alpha'}_{(o,s)}(\Lambda x + a); \quad (3.27b)$$

où $D^{(s,o)}(\Lambda^{-1})$ et $D^{(o,s)}(\Lambda^{-1})$ sont des représentations irréductibles finies (non-unitaires) de SL(2,c).
Rappelons-nous aussi les lois de transformation par P et T :

$$U(P)j^{\alpha}_{(s,o)}(x)U^{-1}(P) = \eta_P j^{\alpha}_{(o,s)}(Px), \quad (3.28a)$$

$$U(P)j^{\alpha}_{(o,s)}(x)U^{-1}(P) = \eta_P j^{\alpha}_{(s,o)}(Px) \ ; \quad (3.28b)$$

$$U(T)j^{\alpha}_{(s,o)}(x)U^{-1}(T) = (-1)^{s+\alpha} j^{-\alpha}_{(s,o)}(Tx), \quad (3.29a)$$

$$U(T)j^{\alpha}_{(o,s)}(x)U^{-1}(T) = (-1)^{s+\alpha} j^{-\alpha}_{(o,s)}(Tx). \quad (3.29b)$$

Le vertex est alors décrit par l'ensemble des fonctions

$$V^{\alpha}_{(s,o)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \equiv \langle p',j'| j^{\alpha}_{(s,o)}(o) |p,j\lambda\rangle \quad (3.30a)$$

et

$$V^{\alpha}_{(o,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \equiv \langle p',j'\lambda'|\, j^{\alpha}_{(o,s)}(o)\,|p,j\lambda\rangle \qquad (3.30b)$$

Tenant compte des définitions précédentes, les énoncés 1 et 2 se généralisent d'une façon immédiate au cas d'un courant correspondant à un champ de spin arbitraire :

Enoncé 3

L'invariance d'un vertex par rapport à l'opération Σ_n (produit de l'opération parité par une rotation d'angle π autour de l'axe n de quantification) implique les relations (formalisme à $(2s+1)$ composantes pour l'opérateur densité de courant)

$$V^{\alpha}_{(s,o)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \eta_P \varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{\lambda-\lambda'-\alpha} V^{\alpha}_{(o,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \qquad (3.31a)$$

$$V^{\alpha}_{(o,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \eta_P \varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{\lambda-\lambda'-\alpha} V^{\alpha}_{(s,o)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}\,, \qquad (3.31b)$$

où $\alpha = -s,\ldots,s$; $\lambda' = -j',\ldots j'$; $\lambda = -j,\ldots,j$.

Enoncé 4

L'invariance d'un vertex par rapport à l'opération Π_t (produit de l'opération renversement de temps par une rotation d'angle π autour de l'axe n de quantification) implique les relations (formalisme à $(2s+1)$ composantes pour l'opérateur densité de courant)

$$\overline{V^{\alpha}_{(s,o)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{s+j-j'} V^{-\alpha}_{(s,o)}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda}\ ; \qquad (3.32a)$$

$$\overline{V^{\alpha}_{(o,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{s+j-j'} V^{-\alpha}_{(o,s)}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda}, \qquad (3.32b)$$

où $\alpha = -s,\ldots,s$; $\lambda' = -j',\ldots,j'$; $\lambda = -j,\ldots,j$.

Les règles énoncés dans ce chapitre nous seront utiles dans la suite, notamment dans l'étude des développements multipolaire des fonctions de vertex.

- - - - -

N O T E S
(Chapitre III)

(1) Par rapport à $\{t,\vec{n}\}$, le produit $\Sigma_n(1)\,\Sigma_n(2)$ est une rotation d'angle π autour de l'axe n : $R_n^{-1}(\pi) = \Sigma_n(1)\Sigma_n(2)$. L'opération $\Sigma_n(1)\,\Sigma_n(2)\,\Sigma_n$ appartient à $L_-^\uparrow$ et commute avec toutes les opérations du petit groupe de t ; c'est l'opération parité. Nous avons donc $P = R_n^{-1}(\pi)\Sigma_n$, d'où la relation (3.4).

(2) Les opérateurs $j^{\alpha,\beta}(o)$ sont les composantes de la matrice

$$\begin{pmatrix} (j^0(0) - j^3(0) & j^1(0) + i\,j^2(0) \\ (j^1(0) - i\,j^2(0) & j^0(0) + j^3(0) \end{pmatrix},$$

où $j^\mu(0) = 0, 1, 2, 3$ sont les composantes habituelles d'espace-temps.

(3) La première détermination de la parité relative Σ-Λ, par une méthode indirecte, a été celle de Trip, Watson et Ferro-Luzzi [62]. L'expérience directe -par mesure du spectre de pairs de Dalitz dans $\Sigma^o \to \Lambda + e^+ + e^-$ - a été faite au CERN ; voir Courant et al. [63] ; l'expérience plus récente est celle du groupe de Columbia, Nussbaum et al. [65]. Pour une description théorique systématique des processus $\Sigma^o \to \Lambda^o + \gamma$ et $\Sigma^o \to \Lambda^o + e^+ + e^-$ voir Michel et Rouhaninejad [61c].

(4) Notons toutefois l'intérêt du processus $\Lambda^o + \gamma$ (coulomb.) $\to \Sigma^o$ comme méthode pour mesurer la vie moyenne de Σ^o. (Voir Dreitlein et Primakoff [62].)

(5) L'échange d'un K* est un bon modèle pour le processus $\bar{p}p \to \bar{\Lambda}\Lambda$ (voir Bessis, Itzykson et Jacob [63].) (Pour une étude des corrélations angulaires dans $\bar{p}p \to \bar{Y}Y$ en tenant compte de la possibilité que le faisceau d'antiprotons soit polarisé, voir Nuyts et de Rafael [63] ; Messiah et Cohen Tannoudji [64].)

(6) Voir par exemple Weinberg [64].

C H A P I T R E IV

PARAMETRISATION MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX. CLASSIFICATION DES FACTEURS DE FORME.

Soit q le quadrivecteur transfert d'énergie-impulsion dans un vertex,

$$q = p - p' \tag{4.1}$$

avec

$$p^2 = m^2 \quad \text{et} \quad p'^2 = m'^2 \quad ; \tag{4.2}$$

et désignons par k le quadrivecteur

$$k = p + p' \quad , \tag{4.3}$$

et par e le quadrivecteur situé dans le 2-plan (p,p'), qui est orthogonal à q :

$$e = [(k.q)^2 - k^2 q^2]^{-\frac{1}{2}} \{(k.a)q - (q.a)k\} \quad , \tag{4.4}$$

avec

$$a = \frac{q}{\sqrt{|q^2|}} \quad . \tag{4.5}$$

Par rapport à une tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$, nous introduirons le trivecteur unité

$$\vec{\varepsilon}(a,e) = - e.\Lambda_{t\to a}\vec{n} \quad , \quad \text{si} \quad q^2 > 0 \quad ; \tag{4.6a}$$

$$\vec{\alpha}(e,a) = - a.\Lambda_{t\to e}\vec{n} \quad , \quad \text{si} \quad q^2 < 0 \quad . \tag{4.6b}$$

Notons que faire le choix t = a dans (4.6a) équivaut à se placer dans le système centre de masse, où la particule virtuelle d'énergie-impulsion q est au repos, tandis que le choix t = e dans (4.6b) revient à se

placer dans le système de Breit où le transfert d'énergie-impulsion q a une composante de temps nulle.

Voyons quelles sont les propriétés de transformation des trivecteurs $\vec{\varepsilon}(a,e)$ où $\vec{\alpha}(e,a)$. Dans ce but, suivant la méthode introduite dans le chapitre 1, nous allons associer à toute transformation de Lorentz $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ la rotation du petit groupe de t :

$$R(a,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda a}\,\Lambda\,\Lambda_{t\to a} \quad , \quad \text{si} \quad q^2 > 0 \quad ;$$

$$R(e,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e}\,\Lambda\,\Lambda_{t\to e} \quad , \quad \text{si} \quad q^2 < 0 \quad .$$

En appliquant $R(a,\Lambda)$ et $R(e,\Lambda)$ aux quadrivecteurs $\Lambda^{-1}_{t\to a}\,e$ et $\Lambda^{-1}_{t\to e}a$ respectivement, on trouve d'après (4.6a,b) les relations,

$$\text{cas } q^2 > 0, \quad \vec{\varepsilon}(\Lambda a,\Lambda e)\cdot\vec{n} = \vec{\varepsilon}(a,e)\cdot R(a,\Lambda)\vec{n} \quad ,$$

$$\text{cas } q^2 < 0, \quad \vec{\alpha}(\Lambda e,\Lambda a)\cdot\vec{n} = \vec{\alpha}(e,a)\cdot R(e,\Lambda)\vec{n} \quad ;$$

c'est-à-dire,

$$\text{cas } q^2 > 0, \quad \varepsilon_i(\Lambda a,\Lambda e) = \sum_{j=1}^{3} R(a,\Lambda)_{ij}\,\varepsilon_j(a,e) \quad , \tag{4.7a}$$

$$i = 1,2,3, \quad \text{avec} \quad R(a,\Lambda)_{ij} = -\,n^{(i)}\cdot\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda a}\Lambda\Lambda_{t\to a}n^{(j)} \quad ;$$

$$\text{cas } q^2 < 0, \quad \alpha_i(\Lambda e,\Lambda a) = \sum_{j=1}^{3} R(e,\Lambda)_{ij}\,\alpha_j(e,a) \quad , \tag{4.7b}$$

$$i = 1,2,3, \quad \text{avec} \quad R(e,\Lambda)_{ij} = -\,n^{(i)}\cdot\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e}\Lambda\Lambda_{t\to e}n^{(j)} \quad .$$

D'une façon générale, les fonctions $Y^{(L)}_M[\vec{\varepsilon}(a,e)]$ ou $Y^{(L)}_M[\vec{\alpha}(e,a)]$ sont les harmoniques sphériques du groupe de rotations homomorphe du petit groupe de la direction de temps t et ont la loi de transformation :

$$\text{cas } q^2 > 0, \quad Y^{(L)}_M[\vec{\varepsilon}(a,e)] = D^{(L)}(\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda a}\,\Lambda\Lambda_{t\to a})^{M'}_{M}\,Y^{(L)}_{M'}[\vec{\varepsilon}(\Lambda a;\Lambda e)]; \tag{4.8a}$$

$$\text{cas } q^2 < 0, \quad Y^{(L)}_M[\vec{\alpha}(e,a)] = D^{(L)}(\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e}\,\Lambda\Lambda_{t\to e})^{M'}_{M}\,Y^{(L)}_{M'}[\vec{\alpha}(\Lambda e,\Lambda a)]. \tag{4.8b}$$

Dans la première partie de ce chapitre nous allons montrer comment l'invariance relativiste permet de développer les éléments de matrice

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = \langle p',j'\lambda'|\, j^{\mu}(0)\,|p,j\lambda\rangle$$

en fonction des harmoniques sphériques (4.8a) ou (4.8b) selon que $q^2 > 0$ ou $q^2 < 0$. Les coefficients de ce développement sont construits explicitement comme des produits de matrices de représentations du petit groupe de t par des symboles 3-j, le tout multiplié par des fonctions de q^2 invariantes relativistes. Nous appelons ces dernières facteurs de forme.

D'après la relation (1.71), la loi de transformation de $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda}$ par les opérations $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ est la suivante :

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}{}_{\tilde{\lambda}'}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}{}_{\tilde{\lambda}}. \tag{4.9}$$

Dans le deuxième membre de cette expression nous avons le produit de l'opération $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ et de deux représentations du petit groupe de t ($D^{(j')}$ et $D^{(j)}$) correspondant à des rotations distinctes ($R^{-1}(u',\Lambda)$ et $R(u,\Lambda)$). Dans le §4a, nous étudions les transformations qu'il faut faire sur ce produit de représentations pour obtenir des fonctions irréductibles par rapport au petit groupe de t. Ceci nous permet de définir ensuite dans le §4b les facteurs de forme en termes desquels on peut paramétriser les composantes $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda}$. Dans le §4c nous appliquons aux développements ainsi obtenus les règles de sélection étudiées dans le chapitre précédent. Ces règles imposent des restrictions aux facteurs de forme lorsque le vertex est invariant par réflexion d'espace, par renversement du mouvement, ou par les deux. Nous discutons quelques applications à titre d'exemple.

Le §4d. est une généralisation des techniques discutées dans les paragraphes précédents au cas d'un vertex où l'opérateur densité de courant a la loi de transformation d'un champ de spin s quelconque [voir (3.26a,b)].

- - - - - -

§4a. CAS D'UN COURANT VECTORIEL OU AXIAL. DESCRIPTION DU VERTEX EN TERMES DE FONCTIONS IRREDUCTIBLES.

Nous définirons une base canonique pour les composantes $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ de la façon suivante : selon que $q^2 > 0$ ou $q^2 < 0$ nous écrirons :

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = a^{\mu}\, A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} + \vec{f}^{\mu}.\vec{F}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad , \quad \text{si } q^2 > 0 \ , \tag{4.10a}$$

avec a^{μ} donné par (4.5) et

$$\vec{f}^{\mu} = \Lambda_{t\to a}\, \vec{n}^{\mu} \quad ; \tag{4.11a}$$

ou bien

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = e^{\mu}\, E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} + \vec{h}^{\mu}.\vec{F}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad , \quad \text{si } q^2 < 0 \ , \tag{4.10b}$$

avec e^{μ} donné par (4.4) et

$$\vec{h}^{\mu} = (\Lambda_{t\to e}\, \vec{n})^{\mu} \quad . \tag{4.11b}$$

Nous aurons besoin parfois dans la suite d'exprimer $\vec{F}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ ou $\vec{H}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ dans une base sphérique. Les composantes correspondantes sont données par les relations

$$\left.\begin{aligned} F^{(\pm)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \{F_1 \pm iF_2\}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad , \\ F^{(o)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} &= F_3(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad ; \end{aligned}\right\} \tag{4.12a}$$

$$\left.\begin{aligned} H^{(\pm)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \{H_1 \pm iH_2\}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad , \\ H^{(o)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} &= H_3\,(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad . \end{aligned}\right\} \tag{4.12b}$$

D'après ces définitions en utilisant la relation (4.9) on déduit pour

les composantes $A(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda}$ et $\vec{F}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda}$; ou $E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ et $\vec{H}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda}$ les lois de transformation suivantes (voir Appendice A4) :

Cas $q^2 > 0$,

$$A(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda}\, A(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}{}_{\tilde{\lambda}} \quad , \quad (4.13a)$$

$$F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda}\, D^{(1)}[R^{-1}(a,\Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}}\, F^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p,\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \quad , \quad (4.14a)$$

avec $\alpha = +1, 0, -1$;

Cas $q^2 < 0$,

$$E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda} E(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}{}_{\tilde{\lambda}} \quad , \quad (4.13b)$$

$$H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda}\, D^{(1)}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}}\, H^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \quad , \quad (4.14b)$$

avec $\alpha = +1, 0, -1$.

Pour réduire le produit de représentations du petit groupe de t qui apparaît dans les deuxièmes membres des expressions précédentes, il nous faut d'abord tranformer ces relations de façon telle qu'on ait un même argument pour chaque représentation. Voici la méthode que nous avons choisie: selon que $q^2 > 0$ ou $q^2 < 0$, et étant donnée une transformation $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$ arbitraire, nous distinguerons une rotation particulière du petit groupe de t ; elle sera associée au quadrivecteur a lorsque $q^2 > 0$,

$$R(a,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda a}\, \Lambda\, \Lambda_{t\to a} \quad ,$$

ou au quadrivecteur e lorsque $q^2 < 0$,

$$R(e,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e}\, \Lambda\, \Lambda_{t\to e} \quad .$$

Ensuite nous exprimerons les rotations $R(u,\Lambda)$ et $R(u',\Lambda)$ en fonction

de $R(a,\Lambda)$ ou $R(e,\Lambda)$. Nous allons prouver à ce propos que pour tout quadrivecteur de genre temps u on a la relation

$$R(u,\Lambda) = R(\Lambda a,\ \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u})\ R(a,\Lambda)\ R^{-1}(a,\Lambda^{-1}_{t\to u}),\ \text{lorsque } q^2 > 0\ ;\ (4.15a)$$

respectivement,

$$R(u,\Lambda) = R(\Lambda e,\ \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u})\ R(e,\Lambda)\ R^{-1}(e,\Lambda^{-1}_{t\to u}),\ \text{lorsque } q^2 < 0\ .\ (4.15b)$$

En effet, considérons par exemple le cas $q^2 < 0$. Par définition,

$$R^{-1}(e,\Lambda^{-1}_{t\to u}) = \Lambda^{-1}_{t\to e}\ \Lambda_{t\to u}\ \Lambda_{t\to\Lambda^{-1}_{t\to u}e} =$$

$$= \Lambda^{-1}_{t\to e}\ \Lambda_{t\to u}\ \Lambda^{-1}_{t\to u}\ \Lambda_{u\to e}\ \Lambda_{t\to u} = \Lambda^{-1}_{t\to e}\ \Lambda_{u\to e}\ \Lambda_{t\to u}\quad ,$$

et le produit $R(\Lambda e,\ \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u})\ R(e,\Lambda)\ R^{-1}(e,\ \Lambda^{-1}_{t\to u})$, exprimé sous forme de produit de transformations de Lorentz s'écrit donc

$$\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\ \Lambda^{-1}_{\Lambda u\to\Lambda e}\ \Lambda_{t\to\Lambda e}\ \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e}\ \Lambda\ \Lambda_{t\to e}\ \Lambda^{-1}_{t\to e}\ \Lambda_{u\to e}\ \Lambda_{t\to u} =$$

$$= \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\ \Lambda\ \Lambda^{-1}\ \Lambda^{-1}_{\Lambda u\to\Lambda e}\ \Lambda\ \Lambda_{u\to e}\ \Lambda_{t\to u} =$$

$$= \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\ \Lambda\ \Lambda^{-1}_{u\to e}\ \Lambda_{u\to e}\ \Lambda_{t\to u} = R(u,\Lambda) \qquad \text{c.q.d.}$$

(Notons que le même raisonnement peut-être répété de façon complètement analogue avec les expressions correspondant au cas $q^2 > 0$). Dans la suite nous utiliserons la notation suivante

$$R(u',a) = \Lambda^{-1}_{t\to a}\ \Lambda_{u'\to a}\ \Lambda_{t\to u'}\ .\qquad (4.16)$$

En tenant compte des relations (4.15a,b), les lois de transformation (4.13a,b) et (4.14a,b) peuvent s'écrire ainsi :

cas $q^2 > 0$,

$$\mathbb{A}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R^{-1}(a,\Lambda)]^{\rho'}_{\widetilde{\rho}'}\ D^{(j)}[R(a,\Lambda)]^{\widetilde{\rho}}_{\rho}\ \mathbb{A}(\Lambda p',\Lambda p)^{\widetilde{\rho}'}_{\widetilde{\rho}}\ ,(4.17a)$$

avec

$$\mathbb{A}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R(u',a)]^{\rho'}_{\lambda},\ D^{(j)}[R(a,u)]^{\lambda}_{\rho} A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \ ; \quad (4.18b)$$

$$\mathbb{F}^{(\alpha)}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R^{-1}(a,\Lambda)]^{\rho'}_{\tilde{\rho}},D^{(j)}[R(a,\Lambda)]^{\tilde{\rho}}_{\rho}D^{(1)}[R^{-1}(a,\Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}}\mathbb{F}^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\rho}'}_{\tilde{\rho}} \ , \quad (4.19a)$$

avec

$$\mathbb{F}^{(\alpha)}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R(u',a)]^{\rho'}_{\lambda},\ D^{(j)}[R(a,u)]^{\lambda}_{\rho}\ F(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \ . \quad (4.20a)$$

cas $q^2 < 0$

$$\mathbb{E}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\rho'}_{\tilde{\rho}},\ D^{(j)}[R(e,\Lambda)]^{\tilde{\rho}}_{\rho}\ \mathbb{E}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\rho}'}_{\tilde{\rho}} \ , \quad (4.17b)$$

avec

$$\mathbb{E}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R(u',e)]^{\rho'}_{\lambda},\ D^{(j)}[R(e,u)]^{\lambda}_{\rho}\ E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \ ; \quad (4.18b)$$

$$\mathbb{H}^{(\alpha)}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\rho'}_{\tilde{\rho}},D^{(j)}[R(e,\Lambda)]^{\tilde{\rho}}_{\rho}D^{(1)}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}}\mathbb{H}^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\rho}'}_{\tilde{\rho}}, \quad (4.19b)$$

avec

$$\mathbb{H}^{(\alpha)}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[R(u',e)]^{\rho'}_{\lambda},\ D^{(j)}[R(e,u)]^{\lambda}_{\rho}\ H(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \ . \quad (4.20b)$$

A partir de ces expressions nous pouvons appliquer les techniques habituelles pour réduire les produits $D^{(j')}(R^{-1})\ D^{(j)}(R)$ dans (4.17a) ou (4.17b) et $D^{(j')}(R^{-1})\ D^{(j)}(R)\ D^{(1)}(R^{-1})$ dans (4.19a) ou (4.19b) :

a) Considérons par exemple l'expression (4.17b) et multiplions à droite et à gauche par le symbol 3-j $\begin{pmatrix} j'\rho & L \\ \rho' & j\ M \end{pmatrix}$, en sommant sur les indices ρ' et ρ. En tenant compte des formules (1.51a,b) et (1.63), on trouve la relation

$$\begin{pmatrix} j'\rho & L \\ \rho' & j\ M \end{pmatrix} \mathbb{E}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(L)}[R(e,\Lambda)]^{M'}_{M} \begin{pmatrix} j'\tilde{\rho} & L \\ \tilde{\rho}' & j\ M' \end{pmatrix} \mathbb{E}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\rho}'}_{\tilde{\rho}} \ ; \quad (4.21b)$$

c'est-à-dire que <u>pour chacune des valeurs</u> $L = |j-j'|, |j-j'+1|, \ldots j+j'$, <u>l'ensemble de fonctions</u>[1]

$$E^{(L)}_{M}(p',p) = \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j'\rho & L \\ \rho' & j\ M \end{pmatrix} D^{(j')}[R(u',e)]^{\rho'}_{\lambda},\ D^{(j)}[R(e,u)]^{\lambda}_{\rho}\ E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \ . \quad (4.22b)$$

avec $M = -L, \ldots, L$, est irréductible.

b) Le même procédé appliqué à l'expression (4.19b) nous donne la relation

$$\begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \mathbb{H}^{(\alpha)}(p',p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(l)}[R(e,\Lambda)]^{m'}_{m} D^{(l)}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} \begin{pmatrix} j' & \tilde{\rho} & l \\ \tilde{\rho}' & j & m' \end{pmatrix} \mathbb{H}^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\rho}'}_{\tilde{\rho}} . \tag{4.23b}$$

Nous pouvons poursuivre la réduction du produit $D^{(l)}(R)\, D^{(l)}(R^{-1})$ en multipliant (4.23b) par le symbole 3-j $\begin{pmatrix} l & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix}$ et en sommant sur les indices α et m. En utilisant les formules (1.51a,b) et (1.63) on arrive au résultat :

$$\begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} \mathbb{H}^{(\alpha)}(p',p)^{\rho'}_{\rho} =$$

$$= D^{(L)}[R(e,\Lambda)]^{M'}_{M} \begin{pmatrix} j' & \tilde{\rho} & l \\ \tilde{\rho}' & j & \tilde{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & \tilde{m} & L \\ \tilde{\alpha} & l & M' \end{pmatrix} \mathbb{H}^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\rho}'}_{\tilde{\rho}} \quad ; \tag{4.24b}$$

c'est-à-dire que pour chacune des valeurs $L = |l-1|, l, l+1$, où $l = |j-j'|, |j-j'+1|, \ldots, j+j'$, l'ensemble des fonctions[2]

$$H^{(L,l)}_{M}(p',p) = \sqrt{(2l+1)(2L+1)} \begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} D^{(j')}[R(u',e)]^{\rho'}_{\lambda} D^{(j)}[R(e,u)]^{\lambda}_{\rho} H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} , \tag{4.25b}$$

avec $M = -L, \ldots, L$, est irréductible.

Les mêmes opérations appliquées aux expressions (4.17a) et (4.19a) correspondant au cas $q^2 > 0$ nous permettent d'obtenir les fonctions irréductibles suivantes :

$$A^{(L)}_{M}(p',p) = \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j' & \rho & L \\ \rho' & j & M \end{pmatrix} D^{(j')}[R(u',a)]^{\rho'}_{\lambda} D^{(j)}[R(a,u)]^{\lambda}_{\rho} A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} ; \tag{4.22a}$$

$$F^{(L,l)}_{M}(p',p) = \sqrt{(2l+1)(2L+1)} \begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} D^{(j')}[R(u',a)]^{\rho'}_{\lambda} D^{(j)}[R(a,u)]^{\lambda}_{\rho} F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} . \tag{4.25a}$$

Pour une valeur de q^2 fixée, et par rapport à une tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$, les fonctions $E^{(L)}_{M}(p',p)$ et $H^{(L,l)}_{M}(p',p)$ ou

$A^{(L)}_{M}(p',p)$ et $F^{(L,1)}_{M}(p',p)$, selon que $q^2 < 0$ ou $q^2 > 0$, ne dépendent que des constantes m^2, m'^2 ; de q^2 ; et des composantes du trivecteur $\vec{\alpha}(e,a)$ ou $\vec{\varepsilon}(a,e)$. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment cette propriété permet de donner aux fonctions irréductibles une structure plus explicite.

---

§4b. FACTEURS DE FORME. PARAMETRISATION MULTIPOLAIRE.

D'après les lois de transformation (4.8b) et (4.21), (4.24b), les fonctions (4.22b) et (4.25b) contractées avec les harmoniques sphériques (4.8a,b) :

$$\sum_M E^{(L)}_M[q^2 \; ; \; \vec{\alpha}(e,a)] \; \bar{Y}^{(L)}_M[\vec{\alpha}(e,a)] \qquad (4.26b)$$

et

$$\sum_M H^{(L,1)}_M[q^2 \; ; \; \vec{\alpha}(e,a)] \; \bar{Y}^{(L)}_M[\vec{\alpha}(e,a)] \quad , \qquad (4.27b)$$

pour chaque valeur de L et (L,1), sont invariantes par rapport aux transformations $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$. En effet, pour (4.26b) par exemple[3], on a

$$\sum_M E^{(L)}_M[q^2 \; ; \; \vec{\alpha}(e,a)] \; \bar{Y}^{(L)}_M[\vec{\alpha}(e,a)] \; =$$

$$= \sum_{M',M''} D^{(L)}[R(e,\Lambda)]^{M'}_{M} \; \overline{D^{(L)}[R(e,\Lambda)]^{M''}_{M}} \; E^{(L)}_{M'}[q^2;\vec{\alpha}(\Lambda e,\Lambda a)] \bar{Y}^{(L)}_{M''}[\vec{\alpha}(\Lambda e,\Lambda a)] \; =$$

$$= \sum_{M'} \delta_{M'M''} \; E^{(L)}_{M'}[q^2;\vec{\alpha}(\Lambda e,\Lambda a)] \; \bar{Y}^{(L)}_{M''}[\vec{\alpha}(\Lambda e,\Lambda a)] \quad .$$

Notons aussi que (4.26b) et (4.27b) sont indépendantes du choix de tétrade $(t,\vec{n})$; en effet, d'après (4.6b),

$$\vec{\alpha}(\Lambda e,\Lambda a) \; = \; - \Lambda a . \Lambda_{t \to \Lambda e} \; \vec{n} \; =$$

$$= \; - a \; \Lambda^{-1} \; \Lambda_{t \to \Lambda e} \; \Lambda \; \Lambda^{-1} \; \vec{n} \; = \; - a . \Lambda_{\Lambda^{-1} t \to e} \; \Lambda^{-1} \; \vec{n} \; = \; \vec{\alpha}'(e,a) \; ,$$

où les composantes de $\vec{\alpha}'(e,a)$ sont définies par rapport à la tétrade de référence $\{t' = \Lambda^{-1} t, \; \vec{n}' = \Lambda^{-1} \; \vec{n}\}$. En outre,

$$R^{-1}(\Lambda e, \Lambda^{-1}_{t \to \Lambda u})_{ij} \; = \; - \; n^{(i)} . \Lambda^{-1}_{t \to \Lambda e} \; \Lambda_{\Lambda u \to \Lambda e} \; \Lambda_{t \to \Lambda u} \; n^{(j)} \; =$$

$$= - \; n^{(i)} . \Lambda \; \Lambda^{-1}_{\Lambda^{-1} t \to e} \; \Lambda^{-1} \; \Lambda \Lambda_{u \to e} \; \Lambda^{-1} \; \Lambda_{t \to \Lambda u} \; \Lambda \Lambda^{-1} \; n^{(j)} \; =$$

$$= \; - \; n'^{(i)} . \; \Lambda^{-1}_{t' \to e} \; \Lambda_{u \to e} \; \Lambda_{t' \to u} \; n'^{(j)} \; \equiv \; R'^{-1}(e, \Lambda^{-1}_{t' \to u})_{ij} \quad ;$$

et on a ainsi,

$$\sum_M E^{(L)}_M[q^2;\ \vec{\alpha}(e,a)]\ \bar{Y}^{(L)}_M[\vec{\alpha}(e,a)] = \sum_M E^{(L)}_M[q^2\ ;\ \vec{\alpha}'(e,a)]\ \bar{Y}^{(L)}_M[\vec{\alpha}'(e,a)].$$

Dans le cas où $q^2 < 0$, nous appellerons <u>facteurs de forme</u> du vertex $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ les fonctions scalaires obtenues par intégration des quantités (4.26b) et (4.27b) sur le petit groupe de t :

$$E^{(L)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\ \sum_M \int d\Omega(\vec{\alpha})\ E^{(L)}_M(q^2;\ \vec{\alpha})\ \bar{Y}^{(L)}_M(\vec{\alpha})\ , \qquad (4.28b)$$

$$H^{(L,1)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\ \sum_M \int d\Omega(\vec{\alpha})\ H^{(L,1)}_M(q^2;\ \vec{\alpha})\ \bar{Y}^{(L)}_M(\vec{\alpha})\ , \qquad (4.29b)$$

où $d\Omega(\vec{\alpha})$ est l'élément de volume invariant du groupe de rotations homomorphe au petit groupe de t. Les facteurs de forme de $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ correspondant au cas où $q^2 > 0$ sont donnés par les expressions :

$$A^{(L)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\ \sum_M \int d\Omega(\vec{\varepsilon})\ A^{(L)}_M(q^2\ ;\ \vec{\varepsilon})\ \bar{Y}^{(L)}_M(\vec{\varepsilon})\ , \qquad (4.28a)$$

$$F^{(L,1)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\ \sum_M \int d\Omega(\vec{\varepsilon})\ F^{(L,1)}_M(q^2;\ \vec{\varepsilon})\ \bar{Y}^{(L)}_M(\vec{\varepsilon})\ . \qquad (4.29a)$$

Compte tenu de ces définitions et après inversion des relations (4.22a,b) et (4.25a,b), le <u>développement des fonctions de vertex</u> $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ <u>en termes des facteurs de forme</u> $A^{(L)}(q^2)$ et $F^{(L,1)}(q^2)$, ou $E^{(L)}(q^2)$ et $H^{(L,1)}(q^2)$, est donné par les expressions suivantes :

cas $q^2 > 0$,

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R(a,u')]^{\lambda'}_{\rho'}\ D^{(j)}[R(u,a)]^{\rho}_{\lambda}\ \times$$

$$\sum_{L,M} \left[a^{\mu}\begin{pmatrix} \rho' & j & M \\ j' & \rho & L \end{pmatrix} A^{(L)}(q^2) + \bar{f}^{\mu}(\alpha) \sum_l \sqrt{2l+1}\ \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & M \\ l & m & L \end{pmatrix} F^{(L,1)}(q^2) \right]$$

$$\sqrt{4\pi}\ Y^{(L)}_M[\vec{\varepsilon}(a,e)]\ ; \qquad (4.30a)$$

cas $q^2 < 0$,

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R(e,u')]^{\lambda'}_{\rho'} D^{(j)}[R(u,e)]^{\rho}_{\lambda} \quad x$$

$$\sum_{L,M} \left[e^{\mu} \begin{pmatrix} \rho' & j & M \\ j' & \rho & L \end{pmatrix} E^{(L)}(q^2) + \bar{h}^{\mu}_{(\alpha)} \sum_{l} \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & M \\ 1 & m & L \end{pmatrix} H^{(L,l)}(q^2) \right]$$

$$\sqrt{4\pi}\, Y^{(L)}_{M}[\vec{\alpha}(e,a)] \quad . \qquad (4.30b)$$

§4c. REGLES DE SELECTION POUR LES FACTEURS DE FORME.

Les règles de sélection étudiées dans le chapitre 3 s'appliquent aux composantes $V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$. Lorsqu'on factorise les fonctions de vertex en termes de facteurs de forme selon la formule (4.30a) ou (4.30b), il convient d'exprimer les règles de sélection de telle façon qu'on puisse les appliquer directement aux facteurs de forme. Voyons quelles sont ces règles.

1°) D'après l'Enoncé 1 du chapitre 3, l'invariance du vertex par rapport à la réflexion Σ_n (voir (3.3)) implique entre les composantes $A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ et $F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, ou $E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ et $H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, les relations suivantes :

cas $q^2 > 0$,

$$A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = -\eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{\lambda-\lambda'} A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} , \qquad (4.31a)$$

$$F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{\lambda-\lambda'-\alpha} F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} ; \qquad (4.32a)$$

cas $q^2 < 0$,

$$E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = -\eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{\lambda-\lambda'} E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} , \qquad (4.31b)$$

$$H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{\lambda-\lambda'-\alpha} H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} . \qquad (4.32b)$$

En ce qui concerne les composantes irréductibles $A^{(L)}_{M}(p',p)$ et $F^{(L,1)}_{M}(p',p)$, ou $E^{(L)}_{M}(p',p)$ et $H^{(L,1)}_{M}(p',p)$, nous allons montrer que l'invariance par rapport à la réflexion Σ_n implique les relations :

cas $q^2 > 0$,

$$A^{(L)}_{M}(p',p) = -\eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{M} A^{(L)}_{M}(p',p) , \qquad (4.33a)$$

$$F^{(L,1)}_{M}(p',p) = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^{M} F^{(L,1)}_{M}(p',p) ; \qquad (4.34a)$$

cas $q^2 < 0$

$$E_M^{(L)}(p',p) = -\eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^M E_M^{(L)}(p',p) \ , \qquad (4.33b)$$

$$H_M^{(L,1)}(p',p) = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^M H_M^{(L,1)}(p',p) \ . \qquad (4.34b)$$

Voyons par exemple comment on peut obtenir (4.34b)[4]. D'après (4.24b), la loi de transformation de $H_M^{(L,1)}(p',p)$ par rotation de π autour de l'axe n (rappelons que $\pi = \mathbf{n} = n^{(3)}$ et $n.p = n.p' = 0$) est

$$H_M^{(L,1)}(p',p) = (-1)^M \delta_{M,M'} H_{M'}^{(L,1)}(Pp', Pp) \ ;$$

en tenant compte, en outre, de la définition (4.25b) et en utilisant l'invariance par parité, on montre que

$$H_M^{(L,1)}(Pp',Pp) = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}' H_M^{(L,1)}(p',p) \ ,$$

d'où le résultat (4.34b). Ces règles induisent des restrictions très simples sur les facteurs de forme définis par les relations (4.28a) et (4.29a), ou (4.28b) et (4.29b). Voici les résultats :

cas $q^2 > 0$

$$A^{(L)}(q^2) = -\eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^L A^{(L)}(q^2) \ , \qquad (4.35a)$$

$$F^{(L,1)}(q^2) = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^L F^{(L,1)}(q^2) \ ; \qquad (4.36a)$$

cas $q^2 < 0$

$$E^{(L)}(q^2) = -\eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^L E^{(L)}(q^2) \ , \qquad (4.35b)$$

$$H^{(L,1)}(q^2) = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^L H^{(L,1)}(q^2) \ ; \qquad (4.36b)$$

c'est-à-dire, <u>l'invariance du vertex par rapport à la réflexion Σ_n implique que, dans les développements (4.30a) ou (4.30b), seuls les facteurs de forme du type $A^{(L)}(q^2)$ ou $E^{(L)}(q^2)$ tels que</u>

$$(-1)^{L+1} = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}' \ , \qquad (4.37)$$

et les facteurs de forme du type $F^{(L,1)}(q^2)$ ou $H^{(L,1)}(q^2)$ tels que

$$(-1)^L = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}' \quad , \tag{4.38}$$

peuvent être non nuls.

2°) L'Enoncé 2 du chapitre 3 appliqué aux composantes $A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ et $F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, ou $E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ et $H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, nous donne les relations :

cas $q^2 > 0$,

$$\overline{A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'} \; A(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \quad , \tag{4.39a}$$

$$\overline{F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'+1} \; F^{(-\alpha)}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \; ; \tag{4.40a}$$

cas $q^2 < 0$,

$$\overline{E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'} \; E(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \quad , \tag{4.39b}$$

$$\overline{H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'+1} \; H^{(-\alpha)}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \; . \tag{4.40b}$$

Nous allons voir ensuite que l'invariance par renversement de mouvement implique pour les composantes irréductibles les restrictions suivantes :

cas $q^2 > 0$,

$$\overline{A^{(L)}_{M}(Pp',Pp)} = (-1)^{L+M} \; A^{(L)}_{-M}(p',p) \quad , \tag{4.41a}$$

$$\overline{F^{(L,1)}_{M}(Pp',Pp)} = (-1)^{L+M} \; F^{(L,1)}_{-M}(p',p) \; ; \tag{4.42a}$$

cas $q^2 < 0$,

$$\overline{E^{(L)}_{M}(Pp',Pp)} = (-1)^{L+M} \; E^{(L)}_{-M}(p',p) \quad , \tag{4.41b}$$

$$\overline{H^{(L,1)}_{M}(Pp',Pp)} = (-1)^{L+M} \; H^{(L,1)}_{-M}(p',p) \; . \tag{4.42b}$$

En effet, considérons par exemple[5] la relation (4.42a). D'après (4.25a) on a,

$$\overline{F^{(L,l)}_{M}(Pp',Pp)} = \sqrt{(2l+1)(2L+1)}\begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} (-1)^{\lambda'-\rho'} D^{(j')}[R(u',a)]^{-\rho'}_{-\lambda'} \times$$

$$\times \quad (-1)^{\rho-\lambda} D^{(j)}[R(a,u)]^{-\lambda}_{-\rho} \overline{F^{(\alpha)}(Pp',Pp)^{\lambda'}_{\lambda}} =$$

$$= \sqrt{(2l+1)(2L+1)} \quad (-1)^{j'-j+l}\begin{pmatrix} j' & -\rho & l \\ -\rho' & j & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} (-1)^{\lambda'-\lambda} (-1)^{m} \times$$

$$\times \quad D^{(j')}[R(u',a)]^{-\rho'}_{-\lambda'} D^{(j)}[R(a,u)]^{-\lambda}_{-\rho} \overline{F^{(\alpha)}(Pp',Pp)^{\lambda'}_{\lambda}} \quad ;$$

mais l'invariance par renversement du mouvement appliquée aux composantes $F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ implique ,

$$\overline{F^{(\alpha)}(Pp',Pp)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{1+\alpha} (-1)^{j+\lambda} (-1)^{-j'-\lambda'} F^{(-\alpha)}(p',p)^{-\lambda'}_{-\lambda} \quad ,$$

d'où la relation (4.42a). En outre, d'après la loi de transformation de $F^{(L,l)}_{M}(p',p)$ par rotation de π autour de l'axe n ($n = n^{(3)}$ et $n.p = n.p' = 0$) on a

$$\overline{F^{(L,l)}_{M}(p',p)} = (-1)^{M} \delta_{M,M'} \overline{F^{(L,l)}_{M'}(p',p)} \quad .$$

Tenant compte de ce résultat et de la relation (4.42a) on déduit :

$$\overline{F^{(L,l)}_{M}(p',p)} = (-1)^{L} F^{(L,l)}_{-M}(p',p) \quad . \qquad (4.44a)$$

Cette règle, ainsi que celles correspondant aux autres composantes irréductibles :

$$\overline{A^{(L)}_{M}(p',p)} = (-1)^{L} A^{(L)}_{-M}(p',p) \quad ; \qquad (4.43a)$$

et, dans le cas $q^2 < 0$,

$$\overline{E^{(L)}_{M}(p',p)} = (-1)^{L} E^{(L)}_{-M}(p',p) \quad , \qquad (4.43b)$$

$$\overline{H^{(L,l)}_{M}(p',p)} = (-1)^{L} H^{(L,l)}_{-M}(p',p) \quad , \qquad (4.44b)$$

nous donnent pour les facteurs de forme correspondants (voir définitions (4.28a,b) et (4.29a,b)) les résultats suivants :

cas $q^2 > 0$,

$$A^{(L)}(q^2) = \overline{A^{(L)}(q^2)} \quad , \tag{4.45a}$$

$$F^{(L,1)}(q^2) = \overline{F^{(L,1)}(q^2)} \quad ; \tag{4.46a}$$

cas $q^2 < 0$

$$E^{(L)}(q^2) = \overline{E^{(L)}(q^2)} \quad , \tag{4.45b}$$

$$H^{(L,1)}(q^2) = \overline{H^{(L,1)}(q^2)} \quad ; \tag{4.46b}$$

c'est-à-dire, l'invariance par renversement du mouvement dans un vertex implique que les facteurs de forme sont relativement réels.

§4d. REMARQUE CONCERNANT LA CONSERVATION DE L'OPERATEUR DENSITE DE COURANT.

Considérons le cas où l'opérateur $j^{\mu}(x)$ dans un vertex est tel que

$$\partial_{\mu}\, j^{\mu}(x) = 0 \quad , \tag{4.47}$$

et voyons quelles sont les conséquences de cette équation de continuité pour les éléments de matrice du vertex. Soit P^{μ} le générateur des translations d'espace-temps et rappelons l'équation suivante[6] ,

$$[P_{\mu},\ j^{\nu}(x)] = -i\,\frac{\partial j^{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}} \quad . \tag{4.48}$$

La valeur moyenne de cet opérateur entre les états à une particule $|p,j\lambda\rangle$ et $|p',j'\lambda'\rangle$ nous donne la relation

$$-i\,\langle p',j'\lambda'|\,\frac{\partial j^{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}}|p,j\lambda\rangle = (p'-p)_{\mu}\langle p',j'\lambda'|\,j^{\nu}(x)|p,j\lambda\rangle \quad ;$$

et tenant compte de l'invariance par translation et après intégration par rapport à x on a

$$-i\int dx\ \langle p',j'\lambda'|\frac{\partial j^{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}}|p,j\lambda\rangle = (p'-p)_{\mu}\int dx\ e^{-i(p-p')x}\langle p',j'\lambda'|\,j^{\nu}(0)|p,j\lambda\rangle,$$

où encore,

$$-i\,g^{\mu}{}_{\nu}\int dx\ \langle p',j'\lambda'|\frac{\partial j^{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}}|p,j\lambda\rangle = (2\pi)^4\delta(p-p'-q)(p-p')_{\mu}\,V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} \quad .$$

D'après (4.47), le premier membre de l'équation précédente est nul, et on a donc

$$q_{\mu}\,V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = 0 \quad . \tag{4.49}$$

D'après (4.10a,b), cela veut dire que dans le cas où $q^2 > 0$,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \text{ entraîne } A(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = 0 \quad ; \qquad (4.50a)$$

et dans le cas où $q^2 < 0$,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \text{ entraîne } a_\mu \vec{h}^\mu . \vec{H}(p',p)^{\lambda'}{}_{\lambda} = 0 \quad . \qquad (4.50b)$$

Voyons quelles sont les restrictions qu'on déduit de (4.50a,b) pour les facteurs de forme (voir l'appendice B4) :

i) dans le cas où $q^2 > 0$ on déduit d'après (4.30a) et (4.50a)

$$A^{(L)}(q^2) = 0, \text{ pour tout L : } |j-j'|, j-j'+1, \ldots j+j' \quad ; \quad (4.51a)$$

ii) dans le cas où $q^2 < 0$ on montre, en tenant compte de (4.30b), que la condition (4.50b) implique une relation linéaire entre les facteurs de forme $H^{(L,l)}(q^2)$,

$$\sum_{L,l} \sqrt{\frac{2L+1}{2l+1}} \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 1 & 0 & L \end{pmatrix} H^{(L,l)}(q^2) = 0 \quad . \qquad (4.51b)$$

§4e. EXEMPLES.

Pour illustrer les applications possibles du formalisme précédent nous allons discuter maintenant quelques exemples.

1°) $K \to \pi + l + \nu_l$.

Au premier ordre dans le couplage faible, l'amplitude de transition pour ce processus est proportionnelle à la quantité

$$\langle p' | j^{\mu}(0) | p \rangle \, l_{\mu} \quad , \tag{4.52}$$

où l_{μ} est l'élément de matrice du courant leptonique associé à l et ν_l ; p' et p sont les énergies-impulsions du π et du K respectivement. D'après (4.30a) le vertex hadronique $\langle p' | j^{\mu}(0) | p \rangle$ s'écrit (voir figure 4.1)

$$V^{\mu}(p',p) = A^{(0)}(q^2) a^{\mu} + F^{(1)}(q^2) e^{\mu} \quad , \tag{4.53}$$

où

$$a^{\mu} = \frac{q^{\mu}}{\sqrt{q^2}} \quad \text{et} \quad e^{\mu} = \frac{(m_K^2 - m_\pi^2 - q^2) p^{\mu} + (m_\pi^2 - m_K^2 - q^2) p'^{\mu}}{\sqrt{q^2 \Delta(m_K, m_\pi, \sqrt{q^2})}} \quad , \tag{4.54}$$

avec $\Delta(a,b,c) = (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)$.

La relation entre les facteurs de forme $A^{(0)}(q^2)$, $F^{(1)}(q^2)$ et les fonctions $f_+(q^2)$, $f_-(q^2)$ définies par

$$V^{\mu}(p',p) = f_+(q^2)(p + p')^{\mu} + f_-(q^2)(p-p')^{\mu} \quad , \tag{4.55}$$

(expression qu'on trouve couramment dans la littérature[7]) est la suivante

$$\frac{1}{\sqrt{q^2}} A^{(0)}(q^2) = \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} f_+(q^2) + f_-(q^2) \quad ; \tag{4.56a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q^2}} F^{(1)}(q^2) = - \frac{\sqrt{\Delta(m_K, m_\pi, \sqrt{q^2})}}{q^2} f_+(q^2) \quad . \tag{4.56b}$$

A l'approximation où on suppose le courant hadronique conservé, on a

$$A^{(o)}(q^2) = 0 \quad ; \tag{4.57}$$

c'est-à-dire,

$$f_-(q^2) = f_+(q^2) \frac{m_\pi^2 - m_K^2}{q^2} \quad . \tag{4.58}$$

2°) $K + N \to K^* + N^*$.

Dans les réactions[8]

$$\begin{aligned} K^+ + p &\to K^+ + \pi^- + p + \pi^+ \\ &\to K^o + \pi^o + p + \pi^+ \\ &\to K^o + \pi^+ + n + \pi^+ \quad , \end{aligned} \tag{4.59}$$

une forte proportion des évènements finaux correspondent à des configurations $K^* + N^*_{3/2}$. On observe pour le K^* produit dans la réaction

$$K^+ + p \to K^* + N^*_{3/2} \quad , \tag{4.60}$$

une distribution angulaire fortement piquée vers l'avant, compatible avec le modèle simple d'échange d'un π illustré par le diagramme de la figure 4.2. Suivant les techniques développées dans ce chapitre, nous allons discuter ci-dessous la structure des fonctions de vertex correspondant au diagramme précédent. Soient p et p' les énergies-impulsions du N et du N*. D'après (4.30b) et en tenant compte de la conservation de parité (voir (4.37)), le vertex π(virtuel) + N → N* est décrit par la fonction

$$V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(3/2)}[R(e,u')]^{\lambda'}_{\rho'} \, D^{(1/2)}[R(u,e)]^{\rho}_{\lambda} \quad x$$

$$x \quad \sum_M \begin{pmatrix} \rho' & 1/2 & M \\ 3/2 & \rho & 1 \end{pmatrix} E^{(1)}(q^2) \sqrt{4\pi} \, Y^{(1)}_M [\vec{\alpha}(e,a)] \quad . \tag{4.61}$$

Rappelons-nous que $u = p/m$, $u' = p'/m'$; et

$$\sqrt{|q^2|}\ a^\mu = (p-p')^\mu\ ,\quad e^\mu = \frac{(m^2 - m'^2 - q^2)p^\mu + (m'^2 - m^2 - q^2)p'^\mu}{\sqrt{|q^2|\Delta(m,m',\sqrt{q^2})}}\ . \quad (4.62)$$

Les éléments de la matrice $V(p',p)^{\lambda'}_{\ \lambda}$ ont une forme particulièrement simple dans le système de Breit, où $t = e$; dans ce système, le vecteur q n'a pas de composante de temps. Nous pouvons choisir en plus l'axe $n^{(2)}$ d'espace le long du quadrivecteur a. On trouve alors le résultat

$$V(E,\vec{p}';E,\vec{p})^{\lambda'}_{\ \lambda} = \frac{i}{2\sqrt{2}} E^{(1)}(-\vec{q}^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.63)$$

Ceci nous permet d'obtenir tout de suite l'expression de la matrice densité $\rho(N^*)^{\lambda}_{\ \lambda'}$, décrivant la distribution de spin dans l'ensemble des N^* produits dans (4.60) par un mécanisme d'échange d'un π. On a

$$\rho(N^*)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}'} = \sum_{\lambda,\tilde{\lambda}} \frac{V(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}\ \rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}}\ \overline{V(p',p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}}}{\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ V(p',p)V^*(p',p)}\ , \quad (4.64)$$

où $\rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}}$ est la matrice densité des protons cible. Pour une cible non polarisée on trouve en tenant compte de (4.63)

$$\rho(N^*)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}'} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} . \quad (4.65)$$

De la même façon, par application de (4.30b) et (4.37), on trouve pour le vertex $K \to K^* + \pi$ (virtuel), l'expression suivante

$$V(k',k)^{\lambda'} = D^{(1)}[R(e',\frac{k'}{m_{K^*}})]^{\lambda'}_{\ \rho'} \sum_M \begin{pmatrix} \rho' & 0 & M \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{E}^{(1)}(q^2)\sqrt{4\pi}\ Y^{(1)}_M[\vec{\alpha}(e',a)], \quad (4.66)$$

avec

$$k'^2 = m_{K^*}^2 \quad ; \quad k^2 = m_K^2 \quad ,$$

et

$$e'^{\mu} = \frac{(m_K^2 - m_{K^*}^2 - q^2)p^{\mu} + (m_{K^*}^2 - m_K^2 - q^2)p'^{\mu}}{\sqrt{|q^2|}\ \Delta(m_K, m_{K^*}, \sqrt{q^2})} \quad . \qquad (4.67)$$

Dans le système t = e', et avec $n^{(2)} = -a$, les éléments de matrice $V(k',k)^{\lambda'}$ s'écrivent simplement

$$V(E,\vec{k}';\ E,\vec{k})^{\lambda'} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\ \varepsilon^{(1)}(-\vec{q}^2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad (4.68)$$

on obtient ainsi pour la matrice densité de l'ensemble des K* produits dans (4.59) par un mécanisme d'échange d'un π, le résultat

$$\rho(K^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \qquad (4.69)$$

§4f. GENERALISATION AU CAS D'UN COURANT AYANT LA LOI DE TRANSFORMATION D'UN CHAMP DE SPIN QUELCONQUE.

Nous avons vu dans le chapitre 3 (voir le §3d) que dans le cadre du formalisme à (2s+1) composantes, un vertex est décrit d'une façon générale par l'ensemble de fonctions

$$V^{\alpha}_{(s,0)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \langle p',j'\lambda' | j^{\alpha}_{(s,0)}(0) | p,j\lambda \rangle \qquad (3.30a)$$

$$V^{\alpha}_{(0,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = \langle p',j'\lambda' | j^{\alpha}_{(0,s)}(0) | p,j\lambda \rangle \quad . \qquad (3.30b)$$

Il est facile d'étendre les techniques discutées pour le courant vectoriel (et axial) aux fonctions (3.30a,b) et de donner leur paramétrisation multipolaire en termes de facteurs de forme. En effet, la loi de transformation des fonctions (3.30a,b) par rapport aux opérations $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ est d'après (1.71) et (3.27a,b)

$$V^{\alpha}_{(s,0)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} D^{(s,0)}(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} V^{\tilde{\alpha}}_{(s,0)}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} , \qquad (4.70a)$$

$$V^{\alpha}_{(0,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} D^{(0,s)}(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} V^{\tilde{\alpha}}_{(0,s)}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} . \qquad (4.70b)$$

Dans le cas où $q^2 > 0$ (resp. $q^2 < 0$) nous multiplierons (4.70a) par $D^{(s,0)}(\Lambda^{-1}_{t\to a})^{\beta}_{\alpha}$ et (4.70b) par $D^{(0,s)}(\Lambda^{-1}_{t\to a})^{\beta}_{\alpha}$ (resp. (4.70a) par $D^{(s,0)}(\Lambda^{-1}_{t\to e})^{\beta}_{\alpha}$ et (4.70b) par $D^{(0,s)}(\Lambda^{-1}_{t\to e})^{\beta}_{\alpha}$), avec sommation sur l'indice α. Nous aurons ainsi les nouvelles lois de transformation suivantes :

cas $q^2 > 0$,

$$\left\{ \begin{matrix} D^{(s,0)}(\Lambda^{-1}_{t\to a})^{\beta}_{\alpha}\, V^{\alpha}_{(s,0)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \\ D^{(0,s)}(\Lambda^{-1}_{t\to a})^{\beta}_{\alpha}\, V^{\alpha}_{(0,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \end{matrix} \right\} = D^{(j)}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} D^{(s)}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\beta}_{\tilde{\beta}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} D^{(s,0)}(\Lambda^{-1}_{t\to \Lambda a})^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}}\, V^{\tilde{\alpha}}_{(s,0)}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \\ D^{(0,s)}(\Lambda^{-1}_{t\to \Lambda a})^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}}\, V^{\tilde{\alpha}}_{(0,s)}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \end{matrix} \right\} , \qquad (4.71a)$$

cas $q^2 < 0$,

$$\left\{\begin{matrix} D^{(s,0)}(\Lambda^{-1}_{t\to e})^{\beta}_{\alpha}\, V^{\alpha}_{(s,0)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \\ D^{(0,s)}(\Lambda^{-1}_{t\to e})^{\beta}_{\alpha}\, V^{\alpha}_{(0,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \end{matrix}\right\} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda}\, D^{(s)}[R^{-1}(a,\Lambda)]^{\beta}_{\tilde{\beta}} \quad x$$

$$x \quad \left\{\begin{matrix} D^{(s,0)}(\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e})^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}}\, V^{\tilde{\alpha}}_{(s,0)}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \\ D^{(0,s)}(\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e})^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}}\, V^{\tilde{\alpha}}_{(0,s)}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \end{matrix}\right\} . \qquad (4.71b)$$

Notons que dans ces expressions, les représentations figurant dans le produit $D^{(j')}D^{(j)}D^{(s)}$, sont identiques à celles qui apparaissent dans (4.14a,b) La réduction de ce produit en représentations irréductibles a été étudiée dans le §4a. Nous pouvons écrire directement les développements des fonctions (3.30a,b) en termes de facteurs de forme par simple comparaison avec les résultats obtenus dans le cas du courant vectoriel. On trouve ainsi les expressions suivantes :

cas $q^2 > 0$

$$\left\{\begin{matrix} V^{\alpha}_{(s,0)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \\ V^{\alpha}_{(0,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \end{matrix}\right\} = D^{(j')}[R(a,u')]^{\lambda'}_{\rho}\, D^{(j)}[R(u,a)]^{\rho}_{\lambda} \sum_{L,l} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & l & M \\ s & m & L \end{pmatrix} \quad x$$

$$x \quad \sqrt{4\pi}\, Y^{(L)}_{M}[\vec{\varepsilon}(a,e)] \left\{\begin{matrix} D^{(s,0)}(\Lambda_{t\to a})^{\alpha}_{\beta}\, Q^{(L,l)}(q^2) \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t\to a})^{\alpha}_{\beta}\, P^{(L,l)}(q^2) \end{matrix}\right\} \quad ; \quad (4.72a)$$

cas $q^2 < 0$,

$$\left\{\begin{matrix} V^{\alpha}_{(s,0)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \\ V^{\alpha}_{(0,s)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \end{matrix}\right\} = D^{(j')}[R(e,u')]^{\lambda'}_{\rho}\, D^{(j)}[R(u,e)]^{\rho}_{\lambda} \sum_{L,l} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & l & M \\ s & m & L \end{pmatrix} \quad x$$

$$x \quad \sqrt{4\pi}\, Y^{(L)}_{M}[\vec{\alpha}(e,a)] \left\{\begin{matrix} D^{(s,0)}(\Lambda_{t\to e})^{\alpha}_{\beta}\, Q^{(L,l)}(q^2) \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t\to e})^{\alpha}_{\beta}\, P^{(L,l)}(q^2) \end{matrix}\right\} . \qquad (4.72b)$$

Les règles de sélection pour les composantes (3.30a,b) ont été données dans le chapitre 3 (voir Enoncé 3 et Enoncé 4). En tenant compte de ces règles on déduit par une méthode analogue à celle décrite dans le §4c. les résultats suivants :

1°) L'invariance du vertex par rapport à la réflexion Σ_n implique

$$Q^{(L,1)}(q^2) = (-1)^L \eta_P \varepsilon\bar{\varepsilon}' P^{(L,1)}(q^2) \quad ; \qquad (4.73)$$

2°) L'invariance du vertex par rapport à l'opération π_t (voir (3.14)) implique

$$Q^{(L,1)}(q^2) = \overline{Q^{(L,1)}(q^2)} \quad , \qquad (4.74a)$$

$$P^{(L,1)}(q^2) = \overline{P^{(L,1)}(q^2)} \quad ; \qquad (4.74b)$$

c'est-à-dire que les facteurs de forme du vertex sont relativement réels.

N O T E S
(Chapitre IV)

(1) Le facteur $\sqrt{2L+1}$ dans (4.22a,b) est un facteur de normalisation choisi de façon telle que pour j' = 0 on ait $E^{(L)}_{M}(p',p) = E^{(j)}_{\rho}(p',p)$.

(2) Le terme $\sqrt{(2l+1)(2L+1)}$ dans (4.25a,b) est un facteur de normalisation.

(3) Le même raisonnement s'applique aussi bien à (4.27b).

(4) On peut appliquer le même raisonnement pour obtenir (4.33a,b) et (4.34a).

(5) On peut appliquer le même raisonnement pour obtenir (4.41a,b) et (4.42b).

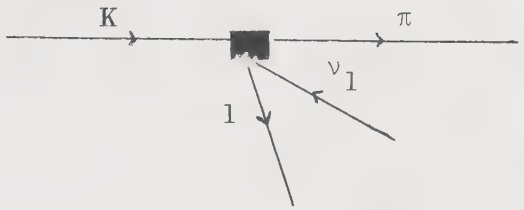
(6) Voir par exemple Källen [60] .

(7) Voir par exemple Dalitz [64]

(8) Voir par exemple : Chinowsky et al., [62] ; Goldhaber [63] ; Ferro-Luzzi et al., [63] ; Ferro-Luzzi et al.[65].

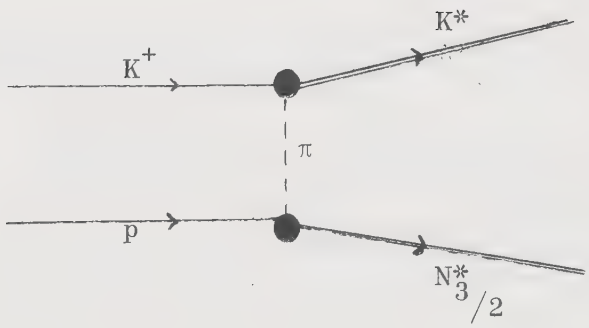
- - - - -

F I G U R E 4.1



$K \rightarrow \pi + l + \nu_l$ au premier ordre dans le couplage faible.

F I G U R E 4.2



Modèle d'échange d'un π pour la réaction $K^+ + p \rightarrow K^* + N^*_{3/2}$.

A P P E N D I C E A4

LOIS DE TRANSFORMATION DES FONCTIONS $A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, $E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$ et $F^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$, $H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda}$.

Nous allons déduire les formules (4.13b) et (4.14b). Le même procédé s'applique aux formules (4.13a) et (4.14a).

Le point de départ est la loi de transformation

$$V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \quad . \quad (4.9)$$

Multiplions cette expression par le quadrivecteur e_{μ} défini dans (4.4). On a alors

$$e_{\mu} V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} (\Lambda e)_{\mu} V^{\mu}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \quad , \quad (A4.a)$$

d'où la loi de transformation (4.13b), avec

$$E(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = e_{\mu} V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad . \quad (A4.b)$$

et

$$E(\Lambda p',\Lambda p)^{\lambda'}_{\lambda} = (\Lambda e)_{\mu} V^{\mu}(\Lambda p',\Lambda p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad . \quad (A4.c)$$

Multiplions ensuite l'expression (4.9) par le quadrivecteur

$$h^{(\alpha)}_{\mu} = (\Lambda_{t\to e}\, n^{(\alpha)})_{\mu} \quad , \quad \alpha = +1,\ 0,\ -1 \ ; \quad (4.11b)$$

en nous rappelant que

$$n^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (n^{(1)} \pm i\, n^{(2)}) \ ; \ n^{(0)} = n^{(3)} \quad .$$

On a

$$\bar{h}^{(\alpha)}_{\mu}\, V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} \;\; x$$

$$x \quad \bar{n}^{(\alpha)}_{\mu}(\Lambda^{-1}_{t\to e}\, \Lambda^{-1}\, \Lambda_{t\to\Lambda e})^{\mu}_{\tilde{\nu}}(\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e})^{\tilde{\nu}}_{\nu}\, V^{\nu}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} =$$

$$= \quad D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} \quad x$$

$$x \left\{ - \sum_{\alpha=+,0,-} \bar{n}^{(\alpha)}_{\mu}(\Lambda^{-1}_{t\to e}\, \Lambda^{-1}\, \Lambda_{t\to\Lambda e})^{\mu}_{\tilde{\nu}}\, n^{\tilde{\nu}}_{(\beta)}\, \bar{n}^{(\beta)}_{\nu'}(\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e})^{\nu'}_{\tilde{\mu}}\, V^{\tilde{\mu}}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \right\} . \qquad \text{(A4.d)}$$

Mais

$$\Lambda^{-1}_{t\to e}\, \Lambda^{-1}\, \Lambda_{t\to\Lambda e} = R^{-1}(e,\Lambda) \quad ,$$

et

$$- \bar{n}^{(\alpha)}_{\mu}(\Lambda^{-1}_{t\to e}\, \Lambda^{-1}\, \Lambda_{t\to\Lambda e})^{\mu}_{\tilde{\nu}}\, n^{\tilde{\nu}}_{(\beta)} = D^{(1)}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\alpha}_{\beta} \quad . \qquad \text{(A4.e)}$$

En outre

$$\bar{n}^{(\beta)}_{\nu'}\, (\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda e})^{\nu'}_{\tilde{\mu}} = (\Lambda_{t\to\Lambda e}\, \bar{n}^{(\beta)})_{\tilde{\mu}} \quad . \qquad \text{(A4.f)}$$

Ces résultats portés dans (A4.d) nous donnent la relation

$$\bar{h}^{(\alpha)}_{\mu}\, V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')}[R^{-1}(u',\Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'}\, D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda}\, D^{(1)}[R^{-1}(e,\Lambda)]^{\alpha}_{\beta} \; x$$

$$x \quad (\Lambda_{t\to\Lambda e}\, \bar{n}^{(\beta)})_{\tilde{\mu}}\, V^{\tilde{\mu}}(\Lambda p',\Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \quad , \qquad \text{(A4.g)}$$

C'est le résultat (4.14b) avec

$$H^{(\alpha)}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = - \bar{h}^{(\alpha)}_{\mu}\, V^{\mu}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} \qquad \text{(A4.h)}$$

et

$$H^{(\alpha)}(\Lambda p',\Lambda p)^{\lambda'}_{\lambda} = -(\Lambda_{t\to\Lambda e}\, \bar{n}^{(\beta)})_{\mu}\, V^{\mu}(\Lambda p',\Lambda p)^{\lambda'}_{\lambda} \quad . \qquad \text{(A4.i)}$$

A P P E N D I C E B4

CONSERVATION DE COURANT ET FACTEURS DE FORME

Considérons d'abord le cas $q^2 > 0$. Nous avons vue que

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \qquad \text{entraîne} \quad A(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = 0 \quad ; \tag{4.50a}$$

c'est-à-dire, d'après (4.30a),

$$D^{(j')}[R(a',u')]^{\lambda'}_{\rho'}\, D^{(j)}[R(u,a)]^{\rho}_{\lambda} \sum_{L,M} \begin{pmatrix} \rho' & j & M \\ j' & \rho & L \end{pmatrix} A^{(L)}(q^2) Y^{(L)}_{M}[\vec{\varepsilon}(a,e)] = 0 \tag{B4.a}$$

Multiplions ces expressions par $D^{(j')}[R(u',a')]^{\tilde{\lambda}'}_{\lambda'}$, $D^{(j)}[R(a,u)]^{\lambda}_{\tilde{\lambda}}$ avec sommation sur les indices λ et λ' ($\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}'$ fixés). On a alors

$$\sum_{L,M} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}' & j & M \\ j' & \tilde{\lambda} & L \end{pmatrix} A^{(L)}(q^2)\, Y^{(L)}_{M}[\vec{\varepsilon}(a,e)] = 0 \quad . \tag{B4.b}$$

Multiplions maintenant par $\begin{pmatrix} j' & \tilde{\lambda} & L' \\ \tilde{\lambda}' & j & M' \end{pmatrix}$ avec sommation sur $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}'$. En utilisant la propriété d'orthogonalité des symboles 3-j, on déduit

$$\frac{1}{2L'+1} A^{(L')}(q^2)\, Y^{(L')}_{M'}[\vec{\varepsilon}(a,e)] = 0 \quad . \tag{B4.c}$$

Ceci étant vrai pour tout L' et M', on conclut donc

$$A^{(L)}(q^2) = 0, \quad \text{pour tout} \quad L : |j-j'|, |j-j'+1|, \ldots j+j'. \tag{4.51a}$$

Dans le cas où $q^2 < 0$, nous avons vut que

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \qquad \text{entraîne} \quad a_\mu \vec{h}^\mu . \vec{H}(p',p)^{\lambda'}_{\lambda} = 0 \quad ; \tag{4.50b}$$

c'est-à-dire, d'après (4.30b)

$$D^{(j')}[R(e,u')]^{\lambda'}_{\rho'} D^{(j)}[R(u,e)]^{\rho}_{\lambda}\ a_\mu \bar{h}^{\mu}_{(\alpha)} \sum_{L,M} \sum_{l} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & M \\ 1 & m & L \end{pmatrix} \times$$

$$\times\ H^{(L,l)}(q^2)\ Y^{(L)}_{M}[\vec{\alpha}(e,a)] = 0 \quad . \qquad \text{(B4.d)}$$

Cette expression dans le système de Breit, le système au repos de e, s'écrit

$$a_\mu \bar{h}^{\mu}_{(\alpha)} \sum_{L,M} \sum_{l} \begin{pmatrix} \lambda' & j & m \\ j' & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & M \\ 1 & m & L \end{pmatrix} H^{(L,l)}(q^2) Y^{(L)}_{M}[\vec{\alpha}(e,a)] \ , \qquad \text{(B4.e)}$$

et si on choisit $h^{\mu}_{(0)} = a^{\mu}$ (voir (4.11b) et (4.6b)), on trouve

$$\sum_{L} \sqrt{2L+1} \sum_{l} \begin{pmatrix} \lambda' & j & m \\ j' & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 1 & m & L \end{pmatrix} H^{(L,l)}(q^2)\ P_L(1) = 0 \ ; \qquad \text{(B4.f)}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{l,L} \sqrt{\frac{2L+1}{2l+1}} \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 1 & 0 & L \end{pmatrix} H^{(L,l)}(q^2) = 0 \quad . \qquad (4.51b)$$

- - - - - - - - -

D E U X I E M E P A R T I E

THEORIE RELATIVISTE DES CORRELATIONS ANGULAIRES DANS LES DESINTEGRATIONS SUCCESSIVES EN DEUX CORPS. APPLICATIONS

Nous allons étudier dans cette deuxième partie les propriétés cinématiques des processus où une particule d'énergie-impulsion p et spin j se désintègre en deux particules : une d'énergie-impulsion p_1 et spin j_1 et une d'énergie-impulsion p_2 et spin zéro

$$p = p_1 + p_2 \qquad (II.1)$$

$$(j \rightarrow j_1, 0)$$

avec

$$p^2 = m^2 \quad \text{et} \quad p_1^2 = m_1^2 , \quad p_2^2 = m_2^2 \qquad (II.2a,b,c)$$

Nous discuterons aussi le cas d'une cascade de désintégrations en deux corps ; c'est-à-dire celui où la particule p_1 de spin j_1 se désintègre encore en deux particules d'énergies-impulsion p_3 et p_4 et spins j_3 et zéro,

$$p_1 = p_3 + p_4 \qquad (II.3)$$

$$(j_1 \rightarrow j_3, 0)$$

avec

$$p_3^2 = m_3^2 \quad \text{et} \quad p_4^2 = m_4^2 \ . \qquad (II.4a,b)$$

Dans le chapitre 6 nous entreprenons l'analyse phénoménologique générale de ces processus. Quelques applications à la détermination du spin et parité des résonances sont discutées dans le chapitre 6.

C H A P I T R E V

DESCRIPTION PHENOMENOLOGIQUE DES DESINTEGRATIONS A DEUX CORPS ET ANALYSE MULTIPOLAIRE

Dans une désintegration à deux corps

$$p = p_1 + p_2 \quad , \tag{5.1}$$

les invariants du système sont des constantes qui dépendent uniquement des masses des particules :

$$p\cdot p_1 = \frac{1}{2}(m^2 + m_1^2 - m_2^2) \; ; \quad p\cdot p_2 = \frac{1}{2}(m^2 + m_2^2 - m_1^2) \; ; \quad p_1\cdot p_2 = \frac{1}{2}(m^2 - m_1^2 - m_2^2). \tag{5.2a,b,c}$$

Par rapport à une tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$, la distribution d'une configuration finale dans (5.1) est complètement spécifiée par les masses des particules et par l'orientation du trivecteur suivant

$$\vec{e}(p,p_1) = \frac{2}{m}\,\Delta^{-\frac{1}{2}}(m,m_1,m_2)(p_1 \Lambda p)^{\lambda\mu} p_\lambda \vec{s}_\mu \; , \tag{5.3a}$$

avec

$$\vec{s} = \Lambda_{t\to u}\,\vec{n} \; ; \qquad u = p/m \tag{5.3b}$$

et

$$\Delta(m,m_1,m_2) = (m + m_1 + m_2)(m + m_1 - m_2)(m - m_1 + m_2)(m - m_1 - m_2);$$

$$(p_1 \Lambda p)^{\lambda\mu} = p_1{}^\lambda p^\mu - p^\lambda\, p_1{}^\mu \; . \tag{5.4}$$

Ce trivecteur, dans le système au repos de la particule p ($t = u$), coïncide avec l'impulsion normalisée de p_1,

$$\vec{e}(p,p_1) \;\to\; \vec{p}_1/|\vec{p}_1| \; .$$

En général, $\vec{e}(p,p_1)$ sont les trois composantes de la projection sur $s^{(1)}_{\mu}$, $s^{(2)}_{\mu}$ et $s^{(3)}_{\mu}$ [voir (5.3b)] du quadrivecteur normalisé qui est dans le 2-plan p,p_1 et orthogonal à p.

Les deux paramètres à mesurer dans chaque évènement du type (5.1) sont l'angle polaire θ et l'angle azimuthal φ de $\vec{e}(p,p_1)$: d'après la définition (5.3) on a

$$\cos\theta = - 2m \Delta^{-1/2}(m,m_1,m_2)(p_1.s^{(3)}) \tag{5.5}$$

et

$$\cos\varphi = [\frac{\Delta}{4m^2} - (p_1.s^{(3)})^2]^{-1/2}(p_1.s^{(1)}) \quad . \tag{5.6}$$

Le but de ce chapitre est de préciser l'information qu'on obtient de l'étude de la dépendance du système en fonction de ces variables angulaires. Dans le § 5a. nous calculons l'expression générale de la distribution angulaire des produits de désintégration dans une transition $j \rightarrow j_1, 0$. Cette distribution angulaire a la forme suivante

$$I(p_1,p) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^{L} X^{(L)}_{M}(j,j_1;p)\, Y^{(L)}_{M}[\vec{e}(p,p_1)] \quad . \tag{5.7}$$

Les coefficients $X^{(L)}_{M}(j,j_1;\, p)$ de ce développement sont calculés explicitement en fonction des paramètres multipolaires $t^{(L)}_{M}(p)$ de la matrice densité de la particule initiale et des amplitudes $A^{(l)}$ de moment orbital $l = |j-j_1|, \ldots, j + j_1$ du processus de désintégration (5.1). Dans chaque élément de volume $d\,\Omega[\vec{e}(p,p_1)]$ nous aurons un ensemble de particules de spin j_1 produites avec une énergie-impulsion p_1. La distribution de spin dans cet ensemble est décrite par les paramètres multipolaires $t^{(L')}_{M'}(p_1,p)$ $(0 \leq L' \leq 2j_1 \; ; \; - L' \leq M' \leq L')$. La dépendance angulaire de ces paramètres est calculée dans le § 5b. et le cas particulier qui donne la dépendance angulaire de la polarisation longitudinale est étudié dans le §5c. Dans l'étude des désintégrations en cascade il est parfois utile de connaître la valeur

moyenne des paramètres $t^{(L')}_{M'}(p_1,p)$ par rapport à la distribution angulaire $I(p_1,p)$.Ce calcul est fait dans le §5d. Nous montrons comment les moyennes $<t^{(L')}_{M'}(p_1,p)>$ s'expriment en fonction des paramètres $t^{(L)}_{M}(p)$ et des amplitudes $A^{(1)}$.

A l'exception du §5d, beaucoup des résultats obtenus dans ce chapitre ont été aussi discutés par plusieurs auteurs[1]. Néanmoins, la technique que nous employons diffère notablement de celle utilisée par ces auteurs dans le sens que nous ne faisons pas un choix particulier de système de référence ou d'axes de quantification.

§5a. DISTRIBUTION ANGULAIRE DANS UNE DESINTEGRATION A DEUX CORPS. CAS PARTICULIERS.

Dans une transition du type (5.1) les éléments de matrice de l'amplitude de transition sont donnés par l'expression

$$T(p_1,p)^{\lambda}{}_{1}{}_{\lambda} \equiv \langle p_1, j_1{}^{\lambda}{}_1 \; ; \; p_2 | T | p, j\lambda \rangle \quad . \tag{5.8}$$

Ici, l'état final est un produit tensoriel d'états à une particule et λ, λ_1 sont définis par les relations

$$-\frac{W}{m}\, s | p, j\lambda \rangle = \lambda | p, j\lambda \rangle \; , \qquad s = \Lambda_{t\to u}\, n^{(3)} \; , \quad u = p/m \; ; \tag{5.9a}$$

$$-\frac{W}{m_1}.s_1 | p_1, j_1{}^{\lambda}{}_1 \rangle = \lambda_1 | p_1, j_1{}^{\lambda}{}_1 \rangle, \; s_1 = \Lambda_{t\to u_1}\, n^{(3)} \; , \; u_1 = p_1/m_1 \quad . \tag{5.9b}$$

L'invariance relativiste de la matrice de transition implique

$$T = U(\Lambda)\; T\; U^{-1}(\Lambda) \quad , \quad \forall\, \Lambda \in L_+^{\uparrow} \tag{5.10}$$

et les éléments de matrice (5.8) ont donc la loi de transformation

$$T(p_1,p)^{\lambda}{}_{1}{}_{\lambda} = D^{(j_1)}[R^{-1}(u,\Lambda)]^{\lambda}{}_{1}{}_{\tilde{\lambda}_1} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda} T(\Lambda p_1, \Lambda p)^{\tilde{\lambda}}{}_{1}{}_{\tilde{\lambda}} \; , \tag{5.11}$$

avec

$$R(u,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\; \Lambda\; \Lambda_{t\to u} \qquad \text{et} \qquad R^{-1}(u_1,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{t\to u_1}\; \Lambda^{-1} \Lambda_{t\to\Lambda u_1} \; . \tag{5.12a,b}$$

Pour réduire ce produit de représentations nous allons utiliser de nouveau la technique introduite dans le §4a. Notons d'abord que les rotations $R(u,\Lambda)$ et $R^{-1}(u_1,\Lambda)$ sont liées par la relation

$$R^{-1}(u_1,\Lambda) = R^{-1}(u_1,u)\; R^{-1}(u,\Lambda)\; R(\Lambda u_1, \Lambda_u) \tag{5.13}$$

avec

$$R(u_1,u) \equiv \Lambda^{-1}_{t\to u}\; \Lambda_{u_1\to u}\; \Lambda_{t\to u_1} \quad . \tag{5.14}$$

Cette relation portée dans (5.11) nous donne l'expression suivante :

$$D^{(j_1)}[R(u_1,u)]^{\nu_1}{}_{\lambda_1} T(p_1,p)^{\lambda_1}{}_{\lambda} = D^{(j_1)}[R^{-1}(u,\Lambda)]^{\nu_1}{}_{\tilde{\nu}_1} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda} \times$$

$$\times D^{(j)}[R(\Lambda u_1,\Lambda u)]^{\tilde{\nu}_1}{}_{\tilde{\lambda}} T(\Lambda p_1,\Lambda p)^{\tilde{\lambda}_1}{}_{\tilde{\lambda}} \quad . \qquad (5.15)$$

Ensuite nous multiplions cette équation par le symbole 3-j $\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix}$ en sommant sur les indices ν_1 et λ. En tenant compte des formules (1.51a,b) et (1.63) on trouve le résultat

$$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} D^{(j_1)}[R(u_1,u)]^{\nu_1}{}_{\lambda_1} T(p_1,p)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} = D^{(l)}[R(u,\Lambda)]^{m'}{}_{m} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\lambda} & l \\ \tilde{\nu}_1 & j & m' \end{pmatrix} D^{(j)}[R(\Lambda u_1,\Lambda u)]^{\tilde{\nu}_1}{}_{\tilde{\lambda}_1} T(\Lambda p_1,\Lambda p)^{\tilde{\lambda}_1}{}_{\tilde{\lambda}} \quad . \qquad (5.16)$$

Ceci nous conduit à définir comme amplitudes irréductibles les quantités[2]

$$T^{(l)}_{m}(p_1,p) = \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} D^{(j_1)}[R(u_1,u)]^{\nu_1}{}_{\lambda_1} T(p_1,p)^{\lambda_1}{}_{\lambda} \, , \qquad (5.17)$$

avec $$l = |j - j_1|, \ldots, j + j_1 \, .$$

A partir des fonctions $T^{(L)}_{m}(p_1,p)$ il est possible de définir des amplitudes invariantes relativistes par la méthode décrite dans le §4b. pour construire les facteurs de forme $A^{(L)}(q^2)$ (voir (4.28a)) et $E^{(L)}(q^2)$ (voir (4.28b)). On a maintenant

$$A^{(l)}_{0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\bar{l}+1}} \sum_{m} \int d\Omega[\vec{e}(p,p_1)] T^{(l)}_{m}(p_1,p) \bar{Y}^{(l)}_{m}[\vec{e}(p,p_1)] \, , \qquad (5.18)$$

où $d\Omega(\vec{e})$ est l'élément de volume invariant

$$d\Omega(\vec{e}) = \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\theta \, d\varphi \quad . \qquad (5.19)$$

Le développement des éléments de matrice $T(p_1,p)^{\lambda_1}{}_{\lambda}$ en termes des amplitudes invariantes $A^{(l)}$ est donné par l'expression :

$$T(p_1,p)^{\lambda_1}{}_{\lambda} = \sqrt{4\pi}\, D^{(j_1)}[R(u,u_1)]^{\lambda_1}{}_{\nu_1} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} A^{(l)} Y^{(l)}_{m}[\vec{e}(p,p_1)] \quad . \quad (5.20)$$

Dans ce développement, les seules inconnues sont les amplitudes $A^{(l)}$ dont la valeur explicite dépend uniquement du mécanisme dynamique responsable du processus de désintégration (5.1).

Soit $\rho(p)^{\lambda}{}_{\tilde{\lambda}}$ la matrice densité décrivant la distribution de spin dans l'échantillon de particules initiales d'énergie-impulsion p. Nous avons vu dans le chapitre 2 que

$$\rho(p)^{\lambda}{}_{\tilde{\lambda}} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \sum_{L,M} (2L+1)\, \bar{t}^{(L)}_{M}(p) \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.10)$$

La distribution angulaire des produits de désintégration dans (5.1) est donnée par l'expression

$$I(p_1,p) = \frac{\mathrm{tr}\; T(p_1,p)\rho(p)\, T^*(p_1,p)}{\int d\Omega\; \mathrm{tr}\; T\, \rho\, T^*} \quad , \quad (5.21)$$

où $T^*(p_1,p)$ est l'amplitude de transition hermitique conjuguée et tr l'opération trace dans l'espace des polarisations. En utilisant (5.20) et (2.10) on trouve :

$$\sum_{\tilde{\lambda},\lambda_1} T(p_1,p)^{\lambda_1}{}_{\lambda}\, \rho(p)^{\lambda}{}_{\tilde{\lambda}}\, \overline{T(p_1,p)}^{\lambda_1}{}_{\tilde{\lambda}} =$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2j+1}} \sum_{l,L,\tilde{l}} \sum_{m,\tilde{m}} (-1)^{-j+j_1+\tilde{l}} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & j_1 & \tilde{l} \\ j & \nu_1 & \tilde{m} \end{pmatrix} (2L+1)\, \bar{t}^{(L)}_{M}(p) \quad x$$

$$x \quad A^{(l)}\, \bar{A}^{(\tilde{l})}\, Y^{(l)}_{m}(\vec{e})\, \bar{Y}^{(\tilde{l})}_{\tilde{m}}(\vec{e}) =$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2j+1}} \sum_{l,L,\tilde{l}} (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} (2L+1) \begin{Bmatrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \sum_{m,M,\tilde{m}} \begin{pmatrix} m & M & \tilde{l} \\ l & L & \tilde{m} \end{pmatrix} \quad x$$

$$x \quad \bar{t}^{(L)}_{M}(p)\, A^{(l)} \bar{A}^{(\tilde{l})}\, Y^{(l)}_{m}(\vec{e})\, \bar{Y}^{(\tilde{l})}_{\tilde{m}}(\vec{e}) \quad =$$

$$= (-1)^{j+j_1} \sum_{l,L,\tilde{l}} \sqrt{\frac{4\pi(2l+1)(2L+1)(2\tilde{l}+1)}{2j+1}} \begin{Bmatrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \sum_{M} \begin{pmatrix} l & L & \tilde{l} \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x$$

$$x \quad A^{(l)}\, \bar{A}^{(\tilde{l})}\, \bar{t}^{(L)}_{M}(p)\, \bar{Y}^{(L)}_{M}[\vec{e}(p,p_1)] \quad , \qquad (5.22)$$

où on a utilisé (A1.c) et (A1.b).

A partir de cette dernière expression on calcule facilement la quantité $\int d\Omega(\vec{e})$ tr T ρ T* dans (5.21),

$$\int d\Omega(\vec{e}) \mathrm{tr}\ T\ \rho\ T^* \quad = \quad (-1)^{j+j_1} \sum_{l} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (2l+1) \begin{Bmatrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |A^{(l)}|^2 \quad =$$

$$(-1)^{j+j_1} \sum_{l} (-1)^{l} \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} \begin{Bmatrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} |A^{(l)}|^2 \quad = \quad \frac{1}{2j+1} \sum_{l} |A^{(l)}|^2 \quad . \qquad (5.23)$$

En tenant compte de (5.22) et (5.23) on trouve finalement pour $I(p_1,p)$ l'expression suivante :

$$I(p_1,p) \quad = \quad (-1)^{j+j_1} \sqrt{4\pi(2j+1)} \sum_{l,L,\tilde{l}} \sqrt{(2\tilde{l}+1)(2L+1)(2l+1)}$$

$$\begin{Bmatrix} j & L & j \\ l & j_1 & \tilde{l} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & L & \tilde{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{M} t^{(L)}_{M}(p) \frac{A^{(l)} \bar{A}^{(\tilde{l})}}{\sum_{l} |A^{(l)}|^2} \quad Y^{(L)}_{M}[\vec{e}(p,p_1)] \qquad . \qquad (5.24)$$

La <u>conservation de la parité</u> dans la désintégration (5.1) implique

$$I(p_1,p) \quad = \quad I(Pp_1,\ Pp) \quad .$$

Ceci veut dire que <u>dans le développement (5.24) seuls les termes avec L pair peuvent avoir une contribution non nulle</u>. Puisque en plus $\begin{pmatrix} l & L & \tilde{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ pour $l + L + \tilde{l}$ impair, on aura $l + \tilde{l}$ pair et les amplitudes $A^{(l)}$ ont donc une même parité

$$(-1)^{l} = \varepsilon\, \bar{\varepsilon}_1\, \bar{\varepsilon}_2 \quad , \tag{5.25}$$

où ε, ε_1 et ε_2 sont les parités intrinsèques des particules d'énergie-impulsion p, p_1 et p_2.

La formule (5.24) a une forme particulière très simple dans le cas où $j_1 = 1/2$. C'est le cas par exemple des désintégrations

$$\Xi \rightarrow \Lambda + \pi \qquad \text{ou} \qquad Y^* \rightarrow Y + \pi \quad .$$

En tenant compte de la relation (A1.d) , la distribution angulaire $I(p_1,p)$ dans ces cas est donnée par la formule[3]

$$I(p_1,p) = \sqrt{4\pi(2j+1)} \sum_{L=0}^{2j} \sqrt{2L+1}\, \frac{1+(-1)^L+\alpha[1-(-1)^L]}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & L & j \\ j & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sum_M t_M^{(L)}(p)\, Y_M^{(L)}[\vec{e}(p,p_1)] \, , \tag{5.26a}$$

avec

$$\alpha = \frac{2\mathrm{Re}\, A^{(j-\frac{1}{2})} \bar{A}^{(j+\frac{1}{2})}}{|A^{(j-\frac{1}{2})}|^2 + |A^{(j+\frac{1}{2})}|^2} \quad . \tag{5.26b}$$

Une valeur non nulle de ce paramètre implique la non-conservation de la parité dans le processus de désintégration. Pour L = 1, on a

$$\langle Y_0^{(1)}[\vec{e}(p,p_1)]\rangle = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \frac{t_0^{(1)}}{\sqrt{j(j+1)}} \tag{5.27}$$

et en tenant compte de la borne de $\delta^{(1)}$ (voir (2.42)) et du fait que $0 \leq |\alpha| \leq 1$ on déduit de cette dernière expression l'inégalité bien connue de Lee et Yang [58] :

$$|\langle \cos\theta \rangle| \leq \frac{1}{2j+2} \quad . \tag{5.28}$$

§5b. DEPENDENCE ANGULAIRE DES PARAMETRES MULTIPOLAIRES D'UNE DES PARTICULES DANS L'ETAT FINAL.

L'état final dans la désintégration (5.1) est caractérisé par la matrice densité

$$\rho(p_1,p) = \frac{T(p_1,p)\ \rho(p)\ T^*(p_1,p)}{\mathrm{tr}\ T(p_1,p)\ \rho(p)\ T^*(p_1,p)} \qquad (5.29)$$

et d'après (2.8) les paramètres multipolaires associés $t^{(L)}_{M}(p_1,p)$ sont donnés par la relation

$$\bar{t}^{(L')}_{M'}(p_1,p) = \sqrt{2j_1+1}\ \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & L' & j_1 \\ j_1 & M' & \lambda_1 \end{pmatrix} \rho(p_1,p)^{\lambda_1}_{\tilde{\lambda}_1} \qquad (5.30)$$

où $\quad 0 \le L' \le 2j_1 \quad$ et $\quad -L' \le M' \le M'$.

En écrivant $\rho(p)$ sous forme multipolaire [voir (2.10)] et en tenant compte du développement (5.20) de l'amplitude $T(p_1,p)$ on trouve l'expression suivante pour les paramètres $t^{(L')}_{M'}(p_1,p)$:

$$I(p_1,p)\ \bar{t}^{(L')}_{M'}(p_1,p) = 4\pi \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)} \sum_{L=0}^{2j} \sum_{l,\tilde{l}} (-1)^{j+j_1+\tilde{l}}\ (2L+1)\ \times$$

$$D^{(j_1)}[R(u,u_1)]^{\lambda_1}_{\nu_1}\ D^{(j_1)}[R(u_1,u)]^{\tilde{\nu}_1}_{\tilde{\lambda}_1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & L' & j_1 \\ j_1 & M' & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & j_1 & \tilde{l} \\ j & \tilde{\nu}_1 & \tilde{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\ \bar{t}^{(L)}_{M}(p)\ \frac{A^{(l)}\bar{A}^{(\tilde{l})}}{\sum_l |A^{(l)}|^2}\ Y^{(l)}_{m}(\vec{e})\ \bar{Y}^{(\tilde{l})}_{\tilde{m}}(\vec{e})$$

et en utilisant (1.51a,b) ; (1.63) et (A.1.b)

$$I(p_1,p)\ \bar{t}^{(L')}_{M'}(p_1,p)=(-1)^{j+j_1}\sqrt{4\pi(2j+1)(2j_1+1)}\sum_{L=0}^{2j}\sum_{l,\tilde{L},\tilde{l}}(2L+1)\sqrt{(2l+1)(2\tilde{L}+1)(2\tilde{l}+1)}\ x$$

$$\sum_{M}\begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\nu}_1 & L' \\ \nu_1 & j_1 & \tilde{M}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & j_1 & \tilde{l} \\ j & \tilde{\nu}_1 & \tilde{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & \tilde{m} & \tilde{L} \\ m & \tilde{l} & \tilde{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & \tilde{l} & \tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \frac{A^{(l)}\bar{A}^{(\tilde{l})}}{\sum_{l}|A^{(l)}|^2}\ x$$

$$x\ \bar{Y}^{(\tilde{L})}_{\tilde{M}}(\vec{e})\ D^{(L')}[R(u_1,u)]^{\tilde{M}'}_{M'}\ \bar{t}^{(L)}_{M}(p)\quad .$$

En introduisant des symboles 6-j et en tenant compte des formules (A1.c) et (A1.e) on peut aussi écrire l'expression précédente sous la forme

$$I(p_1,p)\ \bar{t}^{(L')}_{M'}(p_1,p)\ =\ \sqrt{4\pi(2j+1)(2j_1+1)}\sum_{l,\tilde{l}}\sum_{\tilde{L}}\sqrt{(2l+1)(2\tilde{L}+1)(2\tilde{l}+1)}\ x$$

$$\sum_{L}(2L+1)\begin{Bmatrix} L & j & j \\ \tilde{L} & \tilde{l} & l \\ L' & j_1 & j_1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} L' & \tilde{M} & M \\ \tilde{M}' & \tilde{L} & L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{l} & 0 \\ l & 0 & \tilde{L} \end{pmatrix}\ \frac{A^{(l)}\bar{A}^{(\tilde{l})}}{\sum_{l}|A^{(l)}|^2}\ x$$

$$x\quad \bar{t}^{(L)}_{M}(p)\quad D^{(L')}[R(u_1,u)]^{\tilde{M}'}_{M'}\ Y^{(\tilde{L})}_{\tilde{M}}\ [\vec{e}(p,p_1)]\quad . \qquad (5.31)$$

Cette formule nous donne la dépendance angulaire des paramètres multipolaires $\bar{t}^{(L')}_{M'}(p_1,p)$ de la particule finale d'énergie-impulsion p_1 et spin j_1 dans la réaction (5.1) en fonction des paramètres multipolaires $\bar{t}^{(L)}_{M}(p)$ de la particule initiale et des amplitudes invariantes $A^{(l)}$ du processus de désintégration. Dans le paragraphe suivant nous allons considérer quelques cas particuliers de cette formule.

§5c. CAS PARTICULIER : DEPENDANCE ANGULAIRE DE LA POLARISATION LONGITUDINALE.

La dépendance angulaire du quadrivecteur polarisation $\sigma_\alpha(p_1,p)$ de la particule d'énergie-impulsion p_1 et spin j_1 dans (5.1) est donnée d'après la définition (2.29) par la formule (5.31) en faisant L' = 1 :

$$I(p_1,p)\sigma_\alpha(p_1,p) = 4\pi \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \sqrt{\frac{3}{j_1(j_1+1)}} \sum_{l,\tilde{l}} \sum_{\tilde{L}} \sqrt{(2l+1)(2\tilde{L}+1)(2\tilde{l}+1)} \times$$

$$\times \sum_{L} (2L+1) \begin{Bmatrix} L & j & j \\ \tilde{L} & l & \tilde{l} \\ 1 & j_1 & j_1 \end{Bmatrix} \sum_{M',\tilde{M},M} Y^{(1)}_{M'}(\vec{s}'_\alpha)\, D^{(1)}[R(u,u_1)]^{M'}_{\tilde{M}'} \begin{pmatrix} \tilde{M}' & L & L \\ 1 & \tilde{M} & M \end{pmatrix} \bar{t}^{(L)}_{M}(p) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l} & 0 \\ 1 & 0 & \tilde{L} \end{pmatrix} \frac{A^{(l)}\bar{A}^{(\tilde{l})}}{\sum_l |A^{(l)}|^2} \bar{Y}^{(\tilde{L})}_{\tilde{M}}[\vec{e}(p,p_1)] \quad . \tag{5.32}$$

Rappelons que dans cette expression

$$\vec{s}'_\alpha = (\Lambda_{t\to u_1} \vec{n})_\alpha \qquad \text{avec} \qquad u_1 = p_{1/m_1}$$

et

$$R(u,u_1) = \Lambda^{-1}_{t\to u_1} \Lambda_{u\to u_1} \Lambda_{t\to u} \quad .$$

Nous avons vu dans le chapitre 2 que le degré de polarisation $\delta^{(1)}$ pour une particule de spin $j_1 \geq 1/2$ est borné par la quantité

$$\delta^{(1)} = (-\sigma_\alpha\sigma^\alpha)^{1/2} \leq \frac{3}{2j_1+1} \quad \frac{1}{j_1+1} \quad .$$

Nous allons normaliser le quadrivecteur $\sigma_\alpha(p_1,p)$ par cette borne

$$\hat{\sigma}_\alpha(p_1,p) = \sqrt{\frac{2j_1+1}{3}(j_1+1)}\ \sigma_\alpha(p_1,p) \tag{5.33}$$

et on aura ainsi

$$- \hat{\sigma}_{\alpha}(p_1,p)\ \hat{\sigma}^{\alpha}(p_1,p) \leq 1 \quad . \tag{5.34}$$

En outre, soit l'_{α} le quadrivecteur situé dans le 2-plan (p,p_1) qui est orthogonal à p_1,

$$l'^{\mu} = \frac{2}{m_1} \Delta^{-1/2}(m_1,m,m_2)(p \wedge p_1)^{\lambda\mu} p_{1\lambda} \quad , \tag{5.35}$$

avec $-l'.l' = 1$. Dans le système au repos de p les composantes de l'_{α} sont

$$l'_{\alpha} \rightarrow \left(\frac{|\vec{p}_1|}{m_1}, \frac{E_1}{m_1}\frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}\right) \quad . \tag{5.36}$$

Pour chaque ensemble de particules produites avec une énergie-impulsion p_1 et par rapport à la tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$, la polarisation longitudinale est donnée par la quantité

$$\xi_{long}(p_1,p) = -l'_{\alpha}\ \hat{\sigma}^{\alpha}(p_1,p) \tag{5.37}$$

et d'après (5.32), la dépendance angulaire de cette polarisation s'exprime par la relation suivante :

$$I(p_1,p)\ \xi_{long}(p_1,p) = \sqrt{4\pi(2j+1)}\ \sqrt{\frac{(2j_1+1)(j_1+1)}{j_1}}\ \sum_{l,\tilde{l}}\ \sum_{L} \sqrt{(2\tilde{l}+1)(2L+1)(2l+1)}\ \times$$

$$\sum_{\tilde{L}} (2\tilde{L}+1) \begin{Bmatrix} L & j & j \\ \tilde{L} & 1 & \tilde{l} \\ 1 & j_1 & j_1 \end{Bmatrix} \sum_{M} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l} & 0 \\ 1 & 0 & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \tilde{L} & L & 0 \end{pmatrix} \frac{A^{(1)}\bar{A}^{(\tilde{l})}}{\sum_{l} |A^{(l)}|^2}\ \bar{t}^{(L)}_{M}(p)\ \bar{Y}^{(L)}_{M}[\vec{e}(p,p_1)], \tag{5.38}$$

où nous avons utilisé la relation

$$Y^{(1)}_{M'}[\vec{e}(p,p_1)] = D^{(1)}[R(u,u_1)]^{\tilde{M}'}_{M'}\ Y^{(1)}_{\tilde{M}'}[-l'_{\alpha}\ \vec{s}^{\,\alpha}] \tag{5.39}$$

et les formules (2.12) et (A1.b) . La formule (5.38) admet aussi une expression très simple dans le cas $j_1 = 1/2$. On trouve alors

$$I(p_1,p)\,\xi_{long}(p_1,p) = \sqrt{4\pi(2j+1)}\sum_{L=0}^{2j}\sqrt{2L+1}\;\frac{1-(-1)^L+\alpha[1+(-1)^L]}{2}\;x$$

$$x\sum_M \begin{vmatrix} 1/2 & L & j \\ j & 0 & 1/2 \end{vmatrix} t_M^{(L)}(p)\;Y_M^{(L)}[\vec{e}(p,p_1)]\quad , \qquad (5.40)$$

où α est le paramètre d'asymétrie défini dans (5.26b). Nous voyons d'après (5.26a) et (5.40) que dans une désintégration du type

$$Y^* \to Y + \pi$$

$$(j \to 1/2,\ 0)$$

conservant la parité, par exemple

$$Y_1^*(1385) \to Y + \pi\ ;\quad Y_0^*(1520) \to \Sigma + \pi\ ;\quad \Xi^*(1530) \to \Xi + \pi\ ,$$

les moments d'ordre pair de la distribution angulaire $I(p_1,p)$ sont proportionnels aux paramètres $t_M^{(L\ pair)}(p)$:

$$\langle I(p_1,p)\,\bar{Y}_M^{(L pair)}[\vec{e}(p,p_1)]\rangle = \int d\Omega[\vec{e}(p,p_1)]\;I(p_1,p)\,\bar{Y}_M^{(L)}[\vec{e}\,(p,p_1)] =$$

$$= \sqrt{\frac{(2j+1)(2L+1)}{4\pi}}\;\begin{vmatrix} 1/2 & L & j \\ j & 0 & 1/2 \end{vmatrix}\;t_M^{(L\ pair)}(p)\quad ; \qquad (5.41)$$

les moments d'ordre impair de la distribution angulaire de la polarisation longitudinale $I(p_1,p)\,\xi_{long}(p_1,p)$ sont proportionnels aux paramètres $t_M^{(L impair)}(p)$:

$$\langle I(p_1,p)\,\xi_{long}(p_1,p)\,\bar{Y}_M^{(L impair)}[\vec{e}(p,p_1)]\rangle = \int d\Omega[\vec{e}(p,p_1)]\;I(p_1,p)\;x$$

$$x\;\xi_{long}(p_1,p)\,\bar{Y}_M^{(L impair)}[\vec{e}(p,p_1)] = \sqrt{\frac{(2j+1)(2L+1)}{4\pi}}\;\begin{vmatrix} 1/2 & L & j \\ j & 0 & 1/2 \end{vmatrix}\;t_M^{(L impair)}(p)\ . \qquad (5.42)$$

§5d. EXPRESSION DES MOYENNES DES PARAMETRES MULTIPOLAIRES D'UNE DES PARTICULES DANS L'ETAT FINAL.

La formule (5.32) dans le §5b. nous donne la valeur des paramètres $t^{(L')}_{M'}(p_1,p)$ pour chaque direction de production $\vec{e}(p,p_1)$. Voyons maintenant quelle est l'expression correspondant à leur valeur moyenne par rapport à la distribution angulaire $I(p_1,p)$:

$$< t^{(L')}_{M'}(p_1,p)> \;=\; \int d\Omega[\vec{e}(p,p_1)]\; I(p_1,p)\; t^{(L')}_{M'}(p_1,p) \;. \qquad (5.43)$$

En tenant compte de la formule (5.32) on trouve le résultat

$$<t^{(L)}_{M'}(p_1,p)> \;=\; \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)} \sum_{l=|j-j_1|}^{j+j_1} \sqrt{(2l+1)(2L+1)} \begin{Bmatrix} L & j & j \\ 0 & l & l \\ L & j_1 & j_1 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times\; t^{(L)}_{M}(p)\; \frac{|A^{(l)}|^2}{\sum_l |A^{(l)}|^2}\; \overline{D^{(L)}[R(u_1,u)]}^{M}_{M'} \;. \qquad (5.44)$$

En utilisant (2.8) et (A1.k) on peut encore écrire la relation précédente sous la forme

$$<t^{(L)}_{M}(p_1,p)> \;=\; \sum_l (-1)^{j+j_1+l+L} \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j & l \\ j & j_1 & L \end{Bmatrix} \frac{|A^{(l)}|^2}{\sum_l |A^{(l)}|^2}\; t'^{(L)}_{M}(\Lambda^{-1}_{t\to u_1} p), \qquad (5.45)$$

où

$$t'^{(L)}_{M}(\Lambda^{-1}_{t\to u_1} p) \;=\; \overline{D^{(L)}[R(u_1,u)]}^{M'}_{M}\; t^{(L)}_{M'}(p) \;.$$

Notons que dans le système au repos de la particule p (t = u) on a $t'^{(L)}_{M}(\Lambda^{-1}_{u\to u_1} p) = t^{(L)}_{M}(p)$; de même dans le système au repos de la particule $p_1(t = u_1)$ on a $t'^{(L)}_{M}(p) = t^{(L)}_{M}(p)$. La relation (5.45)

nous donne le facteur de proportionnalité entre les moyennes des paramètres multipolaires des particules de spin j_1 produites dans la désintégration (5.1) et les paramètres multipolaires de la particule initiale de spin j Ce facteur est une combinaison linéaire des modules carrés des amplitudes de moment orbital $l = |j-j_1|, \ldots, j + j_1$ avec des coefficients qui sont des symboles 6-j. Pour L = 1 on trouve la formule :

$$\langle t^{(1)}_{M}(p_1,p)\rangle = \sum_{l} \frac{[j(j+1)+j_1(j_1+1)-l(l+1)]}{2\sqrt{j(j+1)j_1(j_1+1)}} \frac{|A^{(1)}|^2}{\sum_{l}|A^{(1)}|^2} \overline{D^{(1)}_{M'M}[R(u_1,u)]}\, t^{(1)}_{M'}(p). \qquad (5.46)$$

Nous discuterons une application de cette formule à la détermination du spin des résonances dans le chapitre suivant.

N O T E S

(Chapitre V)

(1) Voir par exemple : Byers et Fenster [63] ;
Ademollo et Gatto [64] ;
Ademollo, Gatto et Preparata [64] ;
Henry et de Rafael [65] ;
Button-Schafer [65]
Pour une excellente mise au point sur ce sujet voir Jackson [65a].

(2) Le facteur $\sqrt{2l+1}$ dans (5.17) est un facteur de normalisation choisi de façon telle que pour $j_1 = 0$ on ait $T^{(l)}_{m}(p_1,p) = T(p_1,p)_{\lambda}$.

(3) Cette formule est connu depuis longtemps ; voir par exemple Lee et Yang [58].

C H A P I T R E VI

APPLICATION A LA DETERMINATION DU SPIN ET PARITE DES RESONANCES

A titre d'application du formalisme développé dans le chapitre précédent nous allons discuter maintenant deux types de tests pour la détermination du spin et parité[1] (voir le §6b et le §6c). Pour être complet, nous avons réuni dans le §6a plusieurs propriétés de la matrice densité très importantes dans les applications physiques.

---

§6a. RAPPEL DES PROPRIETES DE LA MATRICE DENSITE

Nous avons discuté la matrice densité pour des particules de spin quelconque dans le chapitre 2. Nous allons résumer ci-dessous les résultats essentiels pour les applications :

1. La condition tr $\rho = 1$ implique

$$t_{o}^{(o)} = 1 \qquad (2.11)$$

2. L'hermiticité de ρ implique

$$\bar{t}_{-M}^{(L)}(p) = (-1)^{M} t_{M}^{(L)}(p) \quad . \qquad (2.12)$$

3. tr $\rho^2 \leq$ tr ρ implique

$$\sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^{L} (2L+1) \left| t_{M}^{(L)} \right|^2 \leq 2j+1 \quad . \qquad (2.14)$$

Eberhard et Good [60] ont donné aussi une borne inférieure pour la quantité $tr\rho^2$. Pour une matrice densité correspondant à un mélange incohérent de Q états purs ($Q < 2j+1$) ils ont montré l'inégalité[2]

$$4. \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^{L} (2L+1) \left| t_M^{(L)} \right|^2 \geq \frac{2j+1}{Q} \quad . \tag{6.1}$$

Cette relation s'applique dans la pratique de la façon suivante : considérons par exemple le cas de la matrice densité d'une résonance B* produite dans une réaction

$$M + N \rightarrow M' + B^* \quad ,$$

où M et M' sont des mésons pseudoscalaires et N un nucléon non polarisé. Alors Q = 2.

En plus de ces quatre conditions générales, les éléments de matrice densité sont soumis à des restrictions imposées par des propriétés de symétrie dans le processus de production de la particule correspondante :

A. Conservation de la parité (Bohr [59]).

Soit X une particule de spin j produite dans une réaction

$$a + b \rightarrow X + c \quad , \tag{6.2}$$

où la parité est conservée. Quantifions le spin de chaque particule selon la normale n au plan de production

$$n_\mu = \chi \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, p_a^\nu \, p_b^\rho \, p_X^\sigma \quad , \tag{6.3}$$

avec χ tel que $n_\mu n^\mu = -1$. Si a et b sont des particules non polarisées et si on somme sur les états de polarisation de c, on a alors

$$t_M^{(L)}(X) = 0 \qquad \text{pour M impair} \tag{6.4}$$

En effet, soit ρ_i la matrice densité initiale

$$\rho_i = \rho_a \otimes \rho_b$$

et T la matrice de transition vers l'état final X + c avec sommation sur les variables de spin de c. On a

$$\rho(X) = \frac{T\rho_i T^*}{\mathrm{tr} T\rho_i T^*} \quad .$$

Soit $U(\Sigma_n)$ l'opérateur correspondant à la réflexion Σ_n (produit de l'opération parité par une rotation d'angle π autour de l'axe n). $U(\Sigma_n)$ commute avec T et puisque a et b sont non polarisées $U(\Sigma_n)$ commute aussi avec ρ_i. On a alors

$$U(\Sigma_n)\rho(X)U^{-1}(\Sigma_n) = \rho(X) \quad ;$$

c'est-à-dire

$$\langle p_X,\ j\lambda' | U(\Sigma_n)\rho(X)U^{-1}(\Sigma_n) | p_X, j\lambda \rangle = \rho(X)^{\lambda'}_{\lambda} \quad , \tag{6.5}$$

d'où on déduit, en tenant compte de la loi de transformation (3.5)

$$(-1)^{\lambda'-\lambda} = 1 \quad ;$$

et puisque $M = \lambda - \lambda'$, on conclue d'après l'expression (2.8)

$$t_M^{(L)}(X) = 0 \qquad \text{pour M impair.} \tag{6.4}$$

Notons que cette conclusion reste valable lorsque la particule X est produite dans des états finals X + c + d + ... où, en plus de la particule X, on ne mesure que l'énergie-impulsion totale des particules c + d + ...

B. Production vers l'avant.

Dans ce cas il est commode de choisir comme axe de quantification la direction vers l'avant. Cette direction est un axe de symétrie et nous avons prouvé dans le §2b. que dans ce cas la matrice densité est diagonale et on a donc

$$t_M^{(L)}(X) = 0 \qquad \text{pour } M \neq 0 \tag{6.6}$$

Nous allons prouver en plus que, si l'état initial n'est pas polarisé et si on regarde que la particule produite vers l'avant

$$t_0^{(L)}(X) = 0 \qquad \text{pour L impair} \tag{6.7}$$

En effet, soit n un axe quelconque orthogonal à la direction de quantification (la direction vers l'avant). Par conservation de parité nous avons encore l'équation (6.5) où $U(\Sigma_n) = U[R_n(\pi)]U(P)$.
Mais maintenant

$$U[R_n(\pi)]U(P)|p_x, j\lambda> \;=\; \varepsilon d^{(j)}(\pi)^{\lambda'}_{\lambda}|p_x, j\lambda'> \quad , \tag{6.8}$$

et

$$d^{(j)}(\pi)^{\lambda'}_{\lambda} \;=\; (-1)^{j+\lambda}\delta_{\lambda',-\lambda} \quad ; \tag{6.9}$$

c'est-à-dire

$$\rho(X)^{\lambda}_{\lambda} \;=\; \rho(X)^{-\lambda}_{-\lambda} \quad . \tag{6.10}$$

En outre, d'après les propriétés de symétrie des 3-j

$$\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (-1)^L\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} -\lambda & L & j \\ j & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad ; \tag{6.11a}$$

et dans le cas où j est entier

$$\begin{pmatrix} 0 & L & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour L impair} \quad . \tag{6.11b}$$

Puisque

$$t_0^{(L)}(X) = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rho(X)^{\lambda}_{\lambda} \quad , \tag{2.8}$$

on conclut d'après (6.10) et (6.11a,b) que

$$t_0^{(L)}(X) = 0 \quad \text{pour L impair} \quad . \tag{6.7}$$

Notons qu'il est encore possible d'obtenir des restrictions supplémentaires pour les éléments de matrice densité lorsqu'on tient compte des symétries internes et quand on compare plusieurs réactions de production. Ceci a été discuté dans le cas de l'indépendance de charge par Michel [61b] et dans le cadre de la symétrie unitaire $SU(3)^{(3)}$ par de Rafael [65b]. L'application de la symétrie $SU(6)_W^{(4)}$ des processus vers l'avant, à la détermination des paramètres $t_0^{(2)}(X)$ a été discutée récemment par Doncel et de Rafael [65].

§6b. TEST POUR LA DETERMINATION DU SPIN DE LA RESONANCE $A_2(1324)$. (de Rafael [64b]).

Cette résonance[5] est produite par exemple dans la réaction

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^- + p \quad . \tag{6.8}$$

D'après les dernières tables de Rosenfeld et al. [65], le A_2 se désintègre fortement dans les modes suivants,

$$A_2 \rightarrow \rho + \pi \sim 91\ \% \tag{6.9a}$$

$$\rightarrow \bar{K} + K \sim (5.5 \pm 1.5)\% \tag{6.9b}$$

$$\rightarrow \eta + \pi \sim (3.6 \pm 3.0)\% \quad . \tag{6.9c}$$

Le spin isotopique du A_2 est I = 1. Le mode en ρ-π nous dit que G = -1. Soit l le moment orbital du système ρ-π dans (6.9a) et l' le moment orbital du système K-$\bar{K}$ dans (6.9b). Par conservation de la parité on a

$$\varepsilon = (-1)^l = (-1)^{l'}$$

où ε est la parité du A_2. Pour le système $\bar{K}$-K

$$G = (-1)^{l'+1} \quad ;$$

puisque G = -1, l' doit être pair et ε = +1. En outre, par conservation du moment cinétique j = l' ; c'est-à-dire j est pair. En principe dans (6.9a) on a

$$\text{soit } l = j \pm 1 \ , \qquad \text{soit } l = j \quad ;$$

mais, puisque l et j doivent être pairs, on a l = j. En conclusion, les nombres quantiques du A_2 sont

$$I = 1 \ ; \ G = -1 \ ; \ \varepsilon = +1 \ \text{ et } \ j \text{ pair} \ ;$$

le système ρ-π dans (6.9a) est dans l'état de moment orbital l = j et le système $\bar{K}$-K dans (6.9b) dans l'état l' = j. Chaque mode de désintégration se fait par une seule amplitude et en conséquence les distributions angulaires correspondantes dépendent uniquemment des paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$ de la matrice densité du A_2. Par application de la formule (5.28) aux deux modes de désintégration on trouve les rapports suivants

$$\frac{\langle Y_M^{(L)}(\hat{\pi})\rangle}{\langle Y_M^{(L)}(\hat{K})\rangle} = 1 - \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{j(j+1)} \quad , \quad \text{pour } L = 2,4,\ldots, 2j \quad .(6.10)$$

Pourvu que $\langle Y_M^{(L)}(\hat{\pi})\rangle \neq 0$ et $\langle Y_M^{(L)}(K)\rangle \neq 0$, leur rapport est indépendant du mécanisme de production et détermine d'après (6.10) la valeur j du spin du A_2.

§6c. TEST POUR LA DETERMINATION DES SPIN ET PARITE DES RESONANCES BARYONIQUES ETRANGES . (de Rafael [64a])

Considérons une résonance Y* ou Ξ* avec les modes successifs de désintegration

$$Y^* \rightarrow Y + \pi \qquad (Y = \Sigma \text{ ou } \Lambda) \tag{6.11a}$$

$$\hookrightarrow N + \pi \qquad ; \tag{6.11b}$$

ou

$$\Xi^* \rightarrow \Xi + \pi \tag{6.12a}$$

$$\hookrightarrow \Lambda + \pi \qquad . \tag{6.12b}$$

Par exemple, pour $Y_1^*(1660)$ et $\Xi^*(1530)$; les spin et parité de ces deux résonances ne sont pas encore bien établis. Nous allons déduire dans ce paragraphe un test qui permet de déterminer le spin et la parité en même temps.

La formule (5.27) appliquée au processus (6.11b) nous dit

$$\langle Y_0^{(1)}[\vec{e}(p_Y,p_N)]\rangle = \frac{\alpha_Y}{\sqrt{4\pi}}\, t_0^{(1)}(p_Y).$$

La moyenne de cette quantité par rapport à la distribution angulaire $I(p_Y,p_{Y*})$ est d'après (5.46)

$$\langle\langle Y_0^{(1)}[\vec{e}(p_Y,p_N)]\rangle\rangle = \int d\Omega[\vec{e}(p_{Y*},p_Y)]\, I(p_Y,p_{Y*}) \int d\Omega[\vec{e}(p_N,p_Y)] \times$$

$$\times\ I(p_Y,p_N)\ Y_0^{(1)}[\vec{e}(p_Y,p_N)] =$$

$$= \frac{\alpha_Y}{3}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\ \overline{D^{(1)}[R(p_Y,p_{Y*})]}^{M'}_{0}\ t^{(1)}_{M'}(p_{Y*}) \times \begin{cases} -\sqrt{\frac{j}{j+1}}\ , & \text{si } l = j+1/2 \quad (6.13a) \\ \sqrt{\frac{j+1}{j}}\ , & \text{si } l = j-1/2\ . \quad (6.13b) \end{cases}$$

En outre, d'après la formule (5.42)

$$<I(p_Y,p_{Y*})\ \xi_{long}(p_Y,p_{Y*})Y_0^{(1)}[\vec{e}(p_{Y*},p_Y)]> = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\ \frac{t_0^{(1)}(p_{Y*})}{2\sqrt{j(j+1)}}\ . \quad (6.14)$$

Il est commode de quantifier le spin du Y* selon la normale n au 3-plan de la réaction de production du Y*. Alors, par conservation de parité [voir (6.4)] on a

$$t_{M'}^{(1)}(p_{Y*}) = \delta_{M',0}\ t_0^{(1)}(p_{Y*}) \quad .$$

En fait, les expérimentateurs préfèrent utiliser au lieu de $t_0^{(1)}$ une quantité η tel que

$$0 \leq \eta^2 \leq 1$$

D'après la borne (2.45) on a, pour une particule de spin j,

$$\eta_{Y*} = \sqrt{\frac{j+1}{j}}\ t_0^{(1)}(p_{Y*}) \quad .$$

Les formules (6.13a,b) s'écrivent alors de la façon suivante

$$<<\cos\theta>> = \frac{\alpha_Y}{3}\ \eta_{Y*} \times \begin{cases} -j/j+1 \ , & \text{si } l = j + 1/2 \ ; \quad (6.15a) \\ 1 \ , & \text{si } l = j - 1/2 \ ; \quad (6.15b) \end{cases}$$

où

$$\cos\theta = -2M\ \Delta^{-1/2}(M,m,\mu)(p_N.s) =$$

$$= 2M\ \Delta^{-1/2}(M,m,\mu)\{(p_Y.n)[\frac{2(p_N.p_{Y*}) + M^2 + m^2 - \mu^2}{2 + M^{*2} + M^2 - \mu^2}] - (p_N.n)\}. \quad (6.16)$$

M, m et μ sont les masses des particules Y, N et π respectivement[6]. Pour comparer la formule (6.14) avec l'expérience il faut connaître la dépendance angulaire de $\xi_{long}(p_Y,p_{Y*})$. Pour déterminer celle-ci il faut analyser les produits de désintégration $Y \to N + \pi$. La quantité à mesurer est

$$\langle\langle \cos\varphi \cos\phi \rangle\rangle = \frac{\alpha_Y \eta_{Y^*}}{6j+6} \quad , \tag{6.17}$$

où

$$\cos\varphi = P^{(1)}[\vec{e}(p_{Y^*}, p_Y) \cdot \vec{e}(p_Y, p_N)] =$$

$$= \frac{4M^2(p_{Y^*} \cdot p_N) - (M^{*2} + M^2 - \mu^2)(M^2 + m^2 - \mu^2)}{\Delta^{1/2}(M^*, M, \mu)\ \Delta^{1/2}(M, m, \mu)} \tag{6.18}$$

et

$$\cos\phi = -2M^*\ \Delta^{-1/2}(M^*, M, \mu)\ (p_Y, n) \quad . \tag{6.19}$$

Notons que, dans le système au repos de Y,

$$\cos\theta = \hat{p}_N \cdot \hat{s}$$

et

$$\cos\varphi = -\hat{p}_{Y^*} \cdot \hat{p}_N \quad ;$$

dans le système au repos de Y*,

$$\cos\phi = \hat{p}_Y \cdot \hat{n} \quad .$$

Le rapport des relations (6.15a,b) et (6.17) est indépendant de la dynamique et détermine la valeur du spin j et la parité du Y* selon le signe qu'on trouve :

$$\frac{\langle\langle \cos\theta \rangle\rangle}{\langle\langle \cos\varphi \cos\phi \rangle\rangle} = \begin{cases} 2j+2, & \text{si } l = j-1/2 \ ; \quad (6.20a) \\ -2j\ , & \text{si } l = j+1/2 \ . \quad (6.20b) \end{cases}$$

La parité du Y* est

$$\varepsilon = (-1)^{j+1/2} \text{ si le rapport précédent est positif ; (6.21a)}$$

$$\varepsilon = (-1)^{j+3/2} \text{ si le rapport précédent est négatif. (6.21b)}$$

Nous espérons avoir montrée avec cet exemple comment utiliser le formalisme développé dans les chapitres précédents pour obtenir des expressions covariantes comparables avec l'expérience.

- - - - - -

N O T E S
(Chapitre VI)

(1) Pour d'autres tests voir par exemple : Adair [55] ; Lee et Yang [58] ; Durand, Landovitz et Leitner [58] ; Bohr [59] ; Meyer, Prentki et Yamagouchi [60] ; Peshkin [61] ; Byers et Fenster [64] ; Shapiro [64] ; Wolters [64] ; Ademollo et Gatto [64] ; Ademollo, Gatto et Preparata [64] ; Peshkin [64]. Button-Schafer [65] ; Jackson [65a]; Ademollo, Gatto et Preparata [65] ; Zemach [65].

(2) On trouve aussi une démonstration de cette inégalité dans le cours de Jackson [65a] aux Houches.

(3) Voir Gell-Mann [61] et Ne'eman [61].

(4) Voir Lipkin et Meshkov [65].

(5) Voir par exemple : Huson et al., [63] ; Goldhaber et al., [64] ; Chung et al., [64] ; Lander et al. [64] ; Alitti et al., [65].

(6) Il y a une correction à faire dans notre article ; de Rafael [64a] : la formule (8) doit s'écrire ainsi

$$\text{Cos } \theta = \frac{2M_B M_F}{[\Delta(M_B, M_F, M_\pi)]^{1/2}} \left\{(B,n)\, \frac{F(B+R)}{1+B.R} - (F.n)\right\}$$

Ceci ne change pas les conclusions du papier.

T R O I S I E M E P A R T I E

THEORIE RELATIVISTE DES CORRELATIONS ANGULAIRES DANS LES DESINTEGRATIONS A TROIS CORPS. APPLICATIONS.

I N T R O D U C T I O N

Considérons un processus où une particule d'énergie-impulsion p se désintègre en trois particules d'énergies-impulsions p_i ; i = 1,2,3,

$$p = p_1 + p_2 + p_3 \quad , \tag{III.1}$$

avec

$$p^2 = m^2 \quad , \qquad p_i^2 = m_i^2 \quad , \qquad i = 1,2,3 \quad . \tag{III.2}$$

Appelons s, t, u les paramètres invariants définis ainsi,

$$s = (p-p_1)^2 = (p_2+p_3)^2 \; ; \quad t = (p-p_2)^2 = (p_3+p_1)^2 ; \quad u = (p-p_3)^2 = (p_1+p_2)^2 , \tag{III.3}$$

avec, d'après (III.1) et (III.2),

$$s + t + u = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \quad ; \tag{III.4}$$

et soit $\vec{X}$ un trièdre dans le 3-plan orthogonal à la direction de p dont les composantes sont définis de la façon suivante :
$X_{(3)}$ est choisi le long de la normale à p_1, p_2, p_3,

$$X^{\lambda}_{(3)} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{N(s,t,u)}} \, p_{1\mu} \, p_{2\nu} \, p_{3\rho} \tag{III.5a}$$

avec N(s,t,u) tel que $X_{(3)} . X_{(3)} = -1$; $X_{(1)}$ est dans le 2-plan (p,p_1) et orthogonal à p,

$$X^{\lambda}_{(1)} = \frac{2}{m} \, \Delta^{-1/2}(m,m_1,\sqrt{s}) (p_1 \Lambda p)^{\lambda\mu} p_{\mu} \quad , \tag{III.5b}$$

avec

$$\Delta(m,m_1,\sqrt{s}) = (m+m_1+\sqrt{s})(m+m_1-\sqrt{s})(m-m_1+\sqrt{s})(m-m_1-\sqrt{s}) \; ; \tag{III.6}$$

et $X_{(2)}$ est tel que,

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \, p^{\lambda} X^{\mu}_{(1)} \, X^{\nu}_{(2)} \, X^{\rho}_{(3)} = m \quad . \tag{III.7}$$

Dans la désintégration (III.1), une configuration du système final est complètement caractérisée par l'ensemble de deux des paramètres s, t, u ; et par l'orientation du trièdre $\vec{X}$ par rapport à une tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$. Cette orientation est fixée par les trois angles d'Euler (α, β, γ) de la rotation[1] qui amène le trièdre $\vec{n}$ au trièdre

$$\{\Lambda^{-1}_{t\to p/m} X_{(1)}, \Lambda^{-1}_{t\to p/m} X_{(2)}, \Lambda^{-1}_{t\to p/m} X_{(3)}\} , \qquad (III.8)$$

où $\Lambda^{-1}_{t\to p/m}$ est la transformation de Lorentz pure, [voir (1.22)],

$$\Lambda^{-1}_{t\to p/m} = 1 - \frac{(t + p/m) \otimes (t + p/m)}{1 + \frac{p.t}{m}} + 2t \otimes p/m . \qquad (III.9)$$

Notons que, en particulier, dans le système au repos de la particule $p(t = p/m)$, les variables s, t, u sont liées aux énergies des particules par les relations,

$$E_1 = \frac{1}{2m}(m^2 + m_1^2 - s); \quad E_2 = \frac{1}{2m}(m^2 + m_2^2 - t); \quad E_3 = \frac{1}{2m}(m^2 + m_3^2 - u), \qquad (III.10)$$

avec

$$E_1 + E_2 + E_3 = m \quad ; \qquad (III.11)$$

et les composantes de $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $X_{(3)}$ sont

$$X_{(1)} = (0, \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}); \quad X_{(2)} = (0, \frac{\hat{z}x\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}); \quad X_{(3)} = (0, \hat{z}) , \qquad (III.12)$$

où $\hat{z}$ est le vecteur de longueur unité orthogonal au plan $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$.

Deux remarques concernant les variables s, t, u ; α, β, γ :

(a) Le calcul du produit $X_{(3)}.X_{(3)} = -1$, avec $X_{(3)}$ défini par (III.5a), montre que la fonction $N(s,t,u)$ est le déterminant formé avec les invariants $p_i.p_j$, i,j = 1,2,3 ; c'est-à-dire,

$$N(s,t,u) = \begin{Vmatrix} m_1^2 & \frac{1}{2}(u-m_1^2-m_2^2) & \frac{1}{2}(t-m_3^2-m_1^2) \\ \frac{1}{2}(u-m_1^2-m_2^2) & m_2^2 & \frac{1}{2}(s-m_2^2-m_3^2) \\ \frac{1}{2}(t-m_3^2-m_1^2) & \frac{1}{2}(s-m_2^2-m_3^2) & m_3^2 \end{Vmatrix} . \qquad (III.13)$$

Notons que lorsque deux quadrivecteurs p_i, p_j sont colinéaires, on a $N(s,t,u) = 0$[2]. La région de Dalitz[3], est définie par l'ensemble des configurations physiques possibles dans une désintégration en trois corps. Pour le processus (III.1) elle est déterminée par les relations,

$$\left.\begin{aligned} & N(s,t,u) \geq 0 \\ & s+t+u = m^2+ m_1^2+ m_2^2+ m_3^2 \end{aligned}\right\} , \qquad (III.14a)$$

où

$$\left.\begin{aligned} & (m_2 + m_3)^2 \leq s \leq (m - m_1)^2 \\ & (m_3 + m_1)^2 \leq t \leq (m - m_2)^2 \\ & (m_1 + m_2)^2 \leq u \leq (m - m_3)^2 \end{aligned}\right\} . \qquad (III.14b)$$

(b) On peut donner une définition covariante des angles d'Euler[1] $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de la façon suivante : soit $\vec{s}$ le trièdre obtenu à partir de $\vec{n}$ par la transformation de Lorentz pure $\Lambda_{t\to p/m}$,

$$s^{(i)} = \Lambda_{t\to p/m}\, n^{(i)} , \quad i = 1,2,3 ; \qquad (III.15)$$

l'angle β est alors donné par $\cos\beta = - s^{(3)}.X_{(3)}$; c'est-à-dire,

$$\cos\beta = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{N(s,t,u)}}\, p_{1\lambda}\, p_{2\mu}\, p_{3\nu}\, s^{(3)}_{\rho} ; \qquad (III.16a)$$

L'angle α est donné par $\cos\alpha = - m'^{(3)}.n^{(1)}$, où $m'^{(3)}$ est le quadrivecteur situé dans le 2-plan $(\Lambda^{-1}_{t\to p/m} X_{(3)}, n^{(3)})$ tel que $m'^{(3)}.n^{(3)} = 0$ et $m'^{(3)}.m'^{(3)} = - 1$; c'est-à-dire,

$$m'^{(3)} = \frac{1}{\sin\beta}\left(n^{(3)}\cos\beta - \Lambda^{-1}_{t\to p/m} X_{(3)}\right) ,$$

et

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sin\beta\sqrt{N(s,t,u)}}\, s^{(1)}_{\lambda}\, p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} \; ; \quad \text{(III.16b)}$$

et l'angle γ est donné par $\cos\gamma = -\, n'^{(3)} . \Lambda^{-1}_{t\to p/m}\, X(1)$, avec

$$n'^{(3)} = \frac{1}{\sin\beta}\left(n^{(3)} - \cos\beta\, \Lambda^{-1}_{t\to p/m}\, X(3)\right) ;$$

c'est-à-dire,

$$\cos\gamma = \frac{-2m}{\sin\beta\sqrt{\Delta(m,m_1,\sqrt{s})}}\,(s^{(3)}.p_1) \quad . \quad \text{(III.16c)}$$

Notons que dans le système au repos de la particule p, les angles β et α sont respectivement l'angle polaire et l'angle azimuthal par rapport au trièdre $\vec{n}$ de la normale $\hat{z}$ au plan de désintégration $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$; l'angle γ est celui défini par la projection de $\vec{p}_1/|\vec{p}_1|$ sur le plan $(\hat{z}, \vec{n}^{(3)})$. (Voir figure 7.1).

Dans cette dernière partie, nous allons étudier la dépendance des processus de désintégration en trois corps en fonction des paramètres s, t, u ; α, β, γ. Dans le chapitre 7 nous entreprenons l'analyse phénoménologique général de ces processus. Plus particulièrement, nous considérons la densité de la probabilité (marginale) de transition à une configuration finale dans l'espace des variables α, β, γ lorsqu'on somme sur le domaine de variation des variables s, t, $u^{(4)}$ (région de Dalitz). Le formalisme est appliqué dans le chapitre 8 à l'analyse phénoménologique des résonances.

N O T E S

(Introduction 3ème Partie)

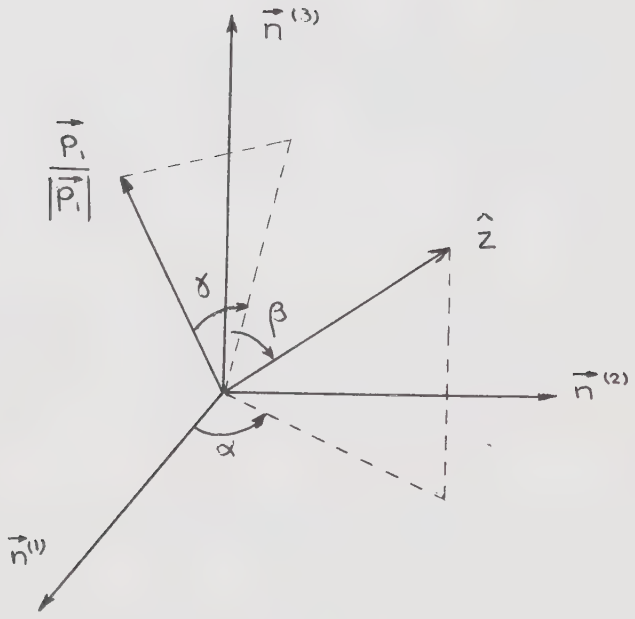
(1) Les conventions pour la définition des angles d'Euler sont celles d'Edmonds [57], chapitre 1 : par rapport au trièdre fixe $\vec{n}$, on fait d'abord une rotation d'angle γ autour de l'axe $n^{(3)}$; ensuite une rotation d'angle β autour de l'axe $n^{(2)}$ et finalement une rotation d'angle α autour de l'axe $n^{(3)}$.

(2) Une étude complète des propriétés de la surface $N(s, t, u) = 0$ a été faite par Byers et Yang [64] .

(3) Dalitz [53]. Voir aussi Fabri [54].

(4) Cette idée a été développée indépendamment, dans le cadre du formalisme de l'hélicité par Berman et Jacob [65]. Voir aussi Jackson [65a].

F I G U R E 7.1



Angles d'Euler α, β, γ dans le système au repos de la particule p. (Voir (III.16a,b,c)) .

C H A P I T R E VII

DESCRIPTION PHENOMENOLOGIQUE DES DESINTEGRATIONS Á TROIS CORPS

Dans ce chapitre nous allons obtenir l'expression générale de l'amplitude de transition du processus (III.1) en fonction d'amplitudes invariantes relativistes (voir le §7a et le §7b). Les différents types de densité de probabilité pour les transitions à trois corps sont définies dans le §7c.

---

§7a. REDUCTION DE L'AMPLITUDE DE TRANSITION EN AMPLITUDES IRREDUCTIBLES

Nous écrirons l'amplitude de transition correspondant au processus

$$p \rightarrow p_1 + p_2 + p_3 \quad , \tag{III.1}$$

sous la forme abrégée

$$T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{}_{\lambda} \equiv \langle p_1, j_1\lambda_1;\ p_2, j_2\lambda_2;\ p_3, j_3\lambda_3 | T | p, j\lambda \rangle \ , \tag{7.1}$$

avec λ, λ_i $(i = 1,2,3)$ définies par les relations

$$-\frac{W}{m}.s\,|p,j\lambda\rangle = \lambda\,|p,j\lambda\rangle,\ s = \Lambda_{t\rightarrow u}{}^{n^{(3)}},\ u = p/m \ ; \tag{7.2a}$$

$$-\frac{W}{m_i}.s_i\,|p_i,j_i\lambda_i\rangle = \lambda_i\,|p_i,j_i\lambda_i\rangle,\ s_i = \Lambda_{t\rightarrow u_i}{}^{n^{(3)}},\ u_i = p_i/m_i \tag{7.2b}$$

La loi de transformation des amplitudes $T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{}_{\lambda}$ est, d'après (1.71),

$$T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{}_{\lambda} = \prod_i D^{(j_i)}(\Lambda^{-1}_{t\to u_i}\Lambda^{-1}\Lambda_{t\to\Lambda u_i})^{\lambda_i}{}_{\tilde{\lambda}_i} \times \tag{7.3}$$

$$\times \quad D^{(j)}(\Lambda^{-1}_{t\to\Lambda u}\Lambda\Lambda_{t\to u})^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda}\, T(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3)^{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3}{}_{\tilde{\lambda}} \ .$$

Pour réduire le produit des représentations qui apparaît dans le deuxième membre de (7.3), nous allons appliquer la même technique que celle utilisée dans le §4a et le §5a : si on appelle $A(p_1, p_2, p_3)^{\nu_1\nu_2\nu_3}{}_{\lambda}$ les nouvelles amplitudes définies par la relation

$$A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1\nu_2\nu_3}{}_{\lambda} = \prod_i D^{(j_i)}[R^{-1}(u,u_i)]^{\nu_i}{}_{\lambda_i}\, T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{}_{\lambda} \tag{7.4}$$

avec

$$R^{-1}(u,u_i) = \Lambda^{-1}_{t\to u}\Lambda_{u_i\to u}\Lambda_{t\to u_i} \ , \tag{7.5}$$

la loi de transformation (7.3) s'écrit

$$A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1\nu_2\nu_3}{}_{\lambda} = \prod_i D^{(j_i)}[R^{-1}(u,\Lambda)]^{\nu_i}{}_{\tilde{\nu}_i} D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}{}_{\lambda} A(\Lambda p_1,p_2,p_3)^{\tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2\tilde{\nu}_3}{}_{\lambda} \tag{7.6}$$

et c'est à partir de cette expression qu'on peut appliquer les méthodes habituelles de réduction d'un produit de représentations du petit groupe de t.

Deux cas d'intérêt notable dans les applications sont : celui où $j_1 = j_2 = j_3 = 0$, par exemple pour l'étude des désintégrations

$$\omega \to \pi^+ + \pi^o + \pi^- \ ; \quad K\pi\pi(1175) \to K + \pi + \pi \ ;$$

et celui où $j_2 = j_3 = 0$, mais $j_1 \neq 0$, par exemple pour l'étude des modes de désintégration

$Y_1^*(1660) \to Y + \pi + \pi$; $K\pi\pi\pi(1660) \to K^* + \pi + \pi$; $\Xi^*(1820) \to \Xi + \pi + \pi$.

Dans le premier cas ($j_1 = j_2 = j_3 = 0$) les amplitudes (7.4) ont d'après (7.6) la propriété d'être irréductibles ; en effet, elles ont la loi de transformation

$$A(p_1,p_2,p_3)_\lambda = D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde\lambda}{}_\lambda \, A(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3)_{\tilde\lambda} \quad ; \qquad (7.7)$$

dans le deuxième cas, en multipliant (7.6) par le symbol 3-j$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix}$ avec sommation sur les indices ν_1 et λ, et tenant compte des formules (1.51a,b) et (1.63), on arrive au résultat

$$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1}{}_\lambda = D^{(l)}[R(u,\Lambda)]^{m'}{}_m \begin{pmatrix} j_1 & \tilde\lambda & l \\ \tilde\nu_1 & j & m' \end{pmatrix} A(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3)^{\tilde\nu_1}{}_{\tilde\lambda} \; ;$$

d'où l'on déduit que, pour chacune des valeurs $l = |j-j_1|, |j-j_1+1|, \ldots, j+j_1$, l'ensemble d'amplitudes$^{(1)}$

$$A^{(l)}_m(p_1,p_2,p_3) = \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1}{}_\lambda \qquad (7.8)$$

avec $m = -l,\ldots,l$, est irréductible.

Le cas général, correspondant à une transition d'une particule de spin j en trois particules de spins j_1, j_2, j_3, peut être traité de la façon suivante : si j est entier (demi-entier), il y a au moins une particule dans l'état final qui a spin entier (demi-entier), par exemple la particule p_1 ; pour réduire le produit des quatre représentations dans (7.6), nous ferons d'abord les couplages (j, j_1) et (j_2, j_3) séparément et ensuite le couplage des deux systèmes. Par application des relations (1.51a,b) et (1.63) dans (7.6) on a,

$$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & K \\ \nu_1 & j & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \nu_2 & \nu_3 & \mu' \end{pmatrix} A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1\nu_2\nu_3}{}_\lambda = D^{(K')}[R(u,\Lambda)]^{\tilde\mu'}{}_{\mu'} D^{(K)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde\mu}{}_\mu \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & \tilde\lambda & K \\ \tilde\nu_1 & j & \tilde\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \tilde\nu_2 & \tilde\nu_3 & \tilde\mu' \end{pmatrix} A(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3)^{\tilde\nu_1\tilde\nu_2\tilde\nu_3}{}_{\tilde\lambda} \quad ;$$

et, après réduction de ce nouveau produit de représentations,

$$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & K \\ \nu_1 & j & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \nu_2 & \nu_3 & \mu' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu' & \mu & l \\ K' & K & m \end{pmatrix} A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1\nu_2\nu_3}{}_{\lambda} = D^{(l)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{m}}_{m} \quad x$$

$$x \quad \begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\lambda} & K \\ \tilde{\nu}_1 & j & \tilde{\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_2 & K' \\ \tilde{\nu}_2 & \tilde{\nu}_3 & \tilde{\mu}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mu}' & \tilde{\mu} & l \\ K' & K & \tilde{m} \end{pmatrix} A(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3)^{\tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2\tilde{\nu}_3}{}_{\tilde{\lambda}} \quad .$$

Nous voyons donc que dans le cas le plus général, les amplitudes irréductibles sont définies par l'ensemble des fonctions[2]

$$A^{(l;K,K')}_{m}(p_1,p_2,p_3) = \sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K'+1)} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & K \\ \nu_1 & j & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \nu_2 & \nu_3 & \mu' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu' & \mu & l \\ K' & K & m \end{pmatrix} A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1\nu_2\nu_3}{}_{\lambda} . \tag{7.9}$$

On obtient le <u>développement de l'amplitude de transition</u> $T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{}_{\lambda}$ <u>en termes des amplitudes irréductibles</u> $A^{(l;K,K')}_{m}(p_1,p_2,p_3)$ par inversion des relations (7.4) et (9) :

$$T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{}_{\lambda} = \sum_{KK'l} \sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K+1)} \prod_i D^{(j_i)}[R(u,u_i)]^{\lambda_i}_{\nu_i} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & \mu \\ j_1 & \lambda & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_2 & \nu_3 & \mu' \\ j_2 & j_3 & K' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K' & K & m \\ \mu' & \mu & l \end{pmatrix} A^{(l;K,K')}_{m}(p_1,p_2,p_3) . \tag{7.10}$$

Dans le paragraphe suivant nous allons voir qu'il est possible de spécifier davantage la structure des éléments de matrice $T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{}_{\lambda}$. Nous montrerons à ce propos comment chaque fonction irréductible $A^{(l,K,K')}_{m}(p_1,p_2,p_3)$ peut s'exprimer, à des fonctions des variables s, t, u près, en termes des fonctions sphériques construites à l'aide des angles d'Euler $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ définis par les relations (III.16abc).

§7b. PARAMETRISATION DE L'AMPLITUDE DE TRANSITION EN AMPLITUDES INVARIANTES RELATIVISTES.

Appelons $\{Z_{(1)}, Z_{(2)}, Z_{(3)}\}$ les composantes du trièdre défini dans (III.8) :

$$Z_{(1)} = \Lambda^{-1}_{t\to u} X_{(1)}, \quad Z_{(2)} = \Lambda^{-1}_{t\to u} X_{(2)}, \quad Z_{(3)} = \Lambda^{-1}_{t\to u} X_{(3)} \qquad \text{(III.8)}$$

et $\{Z'_{(1)}, Z'_{(2)}, Z'_{(3)}\}$ celles du trièdre

$$Z'_{(1)} = \Lambda^{-1}_{t\to \Lambda u}\, \Lambda X_{(1)}, \quad Z'_{(2)} = \Lambda^{-1}_{t\to \Lambda u}\, \Lambda X_{(2)}, \quad Z'_{(3)} = \Lambda^{-1}_{t\to \Lambda u}\, \Lambda X_{(3)}\ , \qquad (7.11)$$

où Λ indique une transformation de Lorentz arbitraire $\varepsilon\ L^{\uparrow}_{+}$. On voit d'après ces définitions que la rotation $R(u,\Lambda)$ du petit groupe de t, associée à la transformation Λ et au quadrivecteur u :

$$R(u,\Lambda) \;=\; \Lambda^{-1}_{t\to \Lambda u}\, \Lambda\, \Lambda_{t\to u}\ ,$$

transforme le trièdre $\vec{Z}$ dans le trièdre $\vec{Z}'$. En effet,

$$R(u,\Lambda)\, Z_{(i)} = \Lambda^{-1}_{t\to \Lambda u}\, \Lambda X_{(i)} = Z'_{(i)} \quad ; \quad i = 1,2,3.$$

Soit $R_{(\alpha\beta\gamma)}$ la rotation qui amène le trièdre $\vec{n}$ au trièdre $\vec{Z}$; et $R_{(\alpha'\beta'\gamma')}$ celle qui amène le trièdre $\vec{n}$ au trièdre $\vec{Z}'$. D'après (7.12), on a la relation

$$R_{(\alpha'\beta'\gamma')} = R(u,\Lambda)\, R_{(\alpha\beta\gamma)}, \qquad (7.13)$$

qui exprimée en terme de représentations s'écrit

$$D^{(j)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda'}\, D^{(j)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda}\ . \qquad (7.14)$$

Considérons maintenant les fonctions [voir (7.8)]

$$\sum_{m'=-l}^{l} A^{(l)}_{m'}(p_1,\ p_2,\ p_3)\ D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m'}{}_{m} \quad .$$

Pour chaque couple de valeurs (l,m) fixes possibles, ces fonctions ont la loi de transformation,

$$\sum_{m'=-l}^{l} A^{(l)}_{m'}(p_1,p_2,p_3)\ D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m'}{}_{m} = \sum_{m',\tilde{m}',m''} D^{(l)}[R(u,\Lambda)]^{\tilde{m}'}{}_{m'} \quad x$$

$$x \quad A^{(l)}_{\tilde{m}'}(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3)\ D^{(l)}[R^{-1}(u,\Lambda)]^{m'}{}_{m''}\ D^{(l)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]^{m''}{}_{m} =$$

$$= \sum_{m''=-l}^{l} A^{(l)}_{m''}(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3)\ D^{(l)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]^{m''}{}_{m} \quad ;$$

c'est-à-dire, elles sont invariantes pour toutes les configurations $(\Lambda p,\ \Lambda p_i)$; i = 1,2,3, avec $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$. Elles sont aussi invariantes par rapport au choix de tétrade de référence $\{t,\vec{n}\}$; en effet, une configuration $(\Lambda p,\ \Lambda p_i)$ par rapport à $\{t,\vec{n}\}$ est équivalente à une configuration $(p,\ p_i)$ par rapport à $\{\Lambda^{-1}t,\ \Lambda^{-1}\vec{n}\}$: d'après (III.16a,b,c) et tenant compte des notations (7.11), on a les relations

$$\cos\beta' = -Z'_{(3)}.n^{(3)} = -\Lambda^{-1}{}_{\Lambda^{-1}t\to u}\ X_{(3)}.\Lambda^{-1}\ n^{(3)} \quad ;$$

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sin\beta'}\ Z'_{(3)}.n^{(1)} = \frac{1}{\sin\beta'}\ \Lambda^{-1}{}_{\Lambda^{-1}t\to u}\ X_{(3)}.\Lambda^{-1}n^{(1)} \quad ;$$

$$\cos\gamma' = \frac{-1}{\sin\beta'}\ Z'_{(1)}.n^{(3)} = \frac{-1}{\sin\beta'}\ \Lambda^{-1}{}_{\Lambda^{-1}t\to u}\ X_{(1)}.\Lambda^{-1}n^{(3)} \quad ;$$

c'est-à-dire que $R_{(\alpha',\beta',\gamma')}$ s'exprime aussi bien à l'aide de $(\Lambda p,\Lambda p_i)$ dans la tétrade $\{t,\ \vec{n}\}$, qu'à l'aide de (p,p_i) dans la tétrade $\{\Lambda^{-1}t,\ \Lambda^{-1}\vec{n}\}$. Nous arrivons ainsi au résultat que pour chaque valeur possible du couple (l,m) dans (7.8) la fonction

$$\mathfrak{U}^{(l)}_{m}(s,t,u\ ;\ X^{(i)}.s^{(j)}) = \sum_{m'=-l}^{l} A^{(l)}_{m'}(p_1,p_2,p_3)\ D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m'}{}_{m}$$

(7.15)

est invariante relativiste (par rapport aux transformations $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$) et ne dépend que des invariants s, t, u [voir (III.3) et (III.4)] et des produits scalaires $X^{(i)}.s^{(j)}$ [voir (III.5a,b) et (III.15)].

Appelons $A^{(l)}_m(\alpha,\beta,\gamma\ ;\ s,\ t,\ u)$ les amplitudes (7.8) où on a spécifié l'argument (p_1,p_2,p_3) en fonction des variables $(s,t,u\ ;\ \alpha,\beta,\gamma)$ et soient $a^{(l)}_m(s,t,u)$ les fonctions invariantes définies ainsi :

$$a^{(l)}_m(s,t,u) = \sum_{m'=-l}^{l} \int d\Omega(\alpha\beta\gamma)\ A^{(l)}_{m'}(\alpha,\beta,\gamma\ ;\ s,t,u)\ D^{(l)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{m'}_{m}, \quad (7.16a)$$

où $d\Omega(\alpha,\beta,\gamma)$ est l'élément de volume invariant du groupe de rotations,

$$d\Omega(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{8\pi^2} \sin\beta d\beta d\alpha d\gamma .$$

L'expression (7.16a) nous donne les coefficients du développement de $A^{(l)}_{m'}(\alpha\beta\gamma\ ;\ s,t,u)$ en termes des fonctions sphériques $D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^{m}$:

$$A^{(l)}_{m'}(\alpha,\beta,\gamma\ ;\ s,t,u) = \sum_{m=-l}^{l} a^{(l)}_m(s,t,u)\ D^{(l)}[R_{(\alpha,\beta,\gamma)}]_{m'}^{m} \quad (7.18)$$

D'après cette relation ; l'amplitude de transition $T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{\lambda}$ (voir (7.10)) exprimée en fonction des amplitudes invariantes

$$a^{(l;K,K')}_m(s,t,u) = \sum_{m'=-l}^{l} \int d\Omega(\alpha\beta\gamma)\ A^{(l;K,K')}_{m'}(\alpha,\beta,\gamma;s,t,u)\ D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m'}_{m},$$

s'écrit (7.16b)

$$T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{\lambda} = \sum_{K,K',l} \sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K'+1)}\ \prod_i D^{(j_i)}[R(u,u_i)]^{\lambda_i}_{\nu_i} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \nu_1 & j & \mu \\ j_1 & \lambda & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 & \nu_3 & \mu' \\ j_2 & j_3 & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K' & K & m' \\ \mu' & \mu & l \end{pmatrix} D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^{m}\ a^{(l;K,K')}_m(s,t,u). \quad (7.17)$$

Cette expression contient toute l'information que l'invariance relativiste (invariance par rapport à $L_+^{\uparrow}$) donne sur les éléments de la matrice de transition du processus (III.1). La structure du mécanisme dynamique du processus étant réduite à la forme explicite des fonctions $a^{(l;K,K')}_m(s,t,u)$.

§7c. ETUDE DE LA DISTRIBUTION ANGULAIRE DES EVENEMENTS FINAUX

Appelons $dV(s,t,u)$ l'élément de volume dans l'espace des variables s,t,u :

$$dV(s,t,u) = \chi^{-1}\ dsdtdu\ \delta(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2)\ , \qquad (7.18a)$$

avec

$$\chi = \int_{D(stu)} dsdtdu\ \delta(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2)\ , \qquad (7.18b)$$

où $D(s,t,u)$ est le domaine (III.14) correspondant à la région de Dalitz. L'élément de volume dans l'espace des variables α,β,γ est donné par

$$d\Omega(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{8\pi^2}\ \sin\beta d\beta d\alpha d\gamma \quad .$$

Dans le processus (III.1), le <u>nombre d'évènements finaux dans l'élément de volume $d\Omega(\alpha,\beta,\gamma)\ dV(s,t,u)$ rapporté au nombre total d'évènements produits</u> est donné par la quantité

$$\frac{dN(\alpha,\beta,\gamma\ ;\ s,t,u)}{N} = I(\alpha,\beta,\gamma\ ;\ s,t,u)d\Omega(\alpha,\beta,\gamma)dV(s,t,u) \qquad (7.19)$$

avec

$$I(\alpha,\beta,\gamma;s,t,u) = \frac{\text{tr}\ T(p_1,p_2,p_3)\rho(p)\ T^*(p_1,p_2,p_3)}{\int dVd\Omega\ \text{tr}\ T\ \rho\ T^*} \qquad (7.20)$$

où $\rho(p)$ est la matrice densité décrivant le mélange dans l'échantillon de particules initiales ; $T(p_1,p_2,p_3)$ est l'amplitude de transition (7.17) ; et $T^*(p_1,p_2,p_3)$ l'amplitude de transition hermitique conjuguée.

A partir de la densité de probabilité $I(\alpha\beta\gamma\ ;\ stu)$ nous pouvons définir les densités de probabilité marginales[3]

$$I(s,t,u) = \int_{(\alpha\beta\gamma)} d\Omega(\alpha\beta\gamma)\ I(\alpha\beta\gamma\ ;\ stu) \quad , \tag{7.21}$$

et

$$I(\alpha\beta\gamma) = \int_{D(stu)} dV(stu)\ I(\alpha\beta\gamma\ ;\ stu) \quad ; \tag{7.22}$$

avec

$$\int_{D(stu)} dV(stu)\ I(stu) = 1 \quad \text{et} \quad \int_{(\alpha\beta\gamma)} d\Omega(\alpha\beta\gamma)\ I(\alpha\beta\gamma) = 1 \ .$$

Notons que d'après la relation (7.19),

$$I(stu)\ dV(stu) = \int_{(\alpha\beta\gamma)} d\Omega(\alpha\beta\gamma)\ \frac{dN(\alpha\beta\gamma\ ;\ stu)}{N} \tag{7.23}$$

et

$$I(\alpha\beta\gamma)\ d\Omega(\alpha\beta\gamma) = \int_{D(stu)} dV(stu)\ \frac{dN(\alpha\beta\gamma\ ;\ stu)}{N} \tag{7.24}$$

c'est-à-dire : <u>$I(stu)\ dV(stu)$ est le nombre d'évènements finaux dans l'élément de volume $dV(stu)$ rapporté au nombre total d'évènements produits, et $I(\alpha,\beta,\gamma)\ d\Omega(\alpha,\beta,\gamma)$ est le nombre d'évènements finaux dans l'élément de volume $d\Omega(\alpha,\beta,\gamma)$ rapporté au nombre total d'évènements produits</u>.

On peut donner une forme plus explicite aux expressions (7.21) et (7.22) utilisant les formules (2.10) et (7.17). Par exemple, on trouve[4] dans le cas où $j_1 \neq 0$, et $j_2 = j_3 = 0$:

$$I(stu) = \frac{\sum_{l,m} |a_m^{(l)}(stu)|^2}{\sum_{l,m} \int_{D(stu)} dV(stu)\, |a_m^{(l)}(stu)|^2} \ , \tag{7.25}$$

et

$$I(\alpha\beta\gamma) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M,M'=-L} F^{(L)}(M,M')\ D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'} \quad ; \tag{7.26}$$

les coefficients $F^{(L)}(M,M')$ pouvant être calculés explicitement[4] en fonction des paramètres $t^{(L)}_{M}(p)$ et des quantités

$$\Gamma(\tilde{l},1)_{\tilde{m},m} = \frac{\int_{D(stu)} \bar{a}^{(\tilde{l})}_{\tilde{m}}(stu)\, a^{(1)}_{m}(stu)\, dV(stu)}{\sum_{l,m} \int_{D(stu} |a^{(l)}_{m}(stu)|^2 dV(stu)} \quad . \qquad (7.27)$$

La densité de probabilité $I(\alpha\beta\gamma)$ nous donne la distribution angulaire des évènements finaux dans (III.1) par rapport à une tétrade de référence $\{t, \vec{n}\}$. Si la particule initiale a spin zero, ou si elle n'est pas polarisée ($t^{(L)}_{M}(p) = \delta_{L0}\delta_{M0}$), la distribution angulaire $I(\alpha\beta\gamma)$ doit être isotrope. La présence d'une corrélation ($I(\alpha\beta\gamma) \neq 1$) permet de mesurer les quantités $F^{(L)}(M,M')$ et éventuellement les paramètres $t^{(L)}_{M}$ et $\Gamma(\tilde{l},1)_{\tilde{m},m}$. Les valeurs de $F^{(L)}(M,M')$ sont alors obtenues de l'expérience mesurant la valeur moyenne des fonctions $\overline{D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'}}$ par rapport à $I(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\frac{1}{2L+1} F^{(L)}(M,M') = \frac{1}{8\pi^2} \int \sin\beta d\beta d\alpha d\gamma\; I(\alpha\beta\gamma)\; \overline{D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'}} =$$

$$= \overline{\langle D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'} \rangle} \; .$$

Il est parfois intéressant d'utiliser une densité de probabilité conditionnelle définie de la façon suivante[3]

$$I(\alpha\beta\gamma|stu) = \frac{I(\alpha\beta\gamma\,;\,stu)}{I(stu)} \quad ; \qquad (7.28)$$

l'élément de probabilité correspondant : $I(\alpha\beta\gamma|stu)d\Omega(\alpha\beta\gamma)$, est égal au nombre d'évènements finaux, avec des valeurs s,t,u fixées, produits dans l'élément de volume $d\Omega(\alpha\beta\gamma)$.

N O T E S
(Chapitre VII)

(1) Le facteur $\sqrt{2l+1}$ dans la définition de $A^{(l)}_{m}$ est un facteur de normalisation choisi de façon telle que, pour $j_1 = 0$, on ait $A^{(j)}{}_{\lambda}(p_1,p_2,p_3) = A(p_1,p_2,p_3)_{\lambda}$.

(2) Le facteur de normalisation $\sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K'+1)}$ est tel que pour $j_2 = j_3 = 0$ on a $A^{(l)}_{m}(p_1,p_2,p_3) = A^{(K)}_{\mu}(p_1,p_2,p_3)$.

(3) Voir par exemple Cramér [62], chapitre 9).

(4) Voir l'appendice A8 pour les détails de ce calcul.

CHAPITRE VIII

APPLICATION A L'ANALYSE PHENOMENOLOGIQUE DES RESONANCES

Nous avons montré dans le chapitre précédent que pour une transition $j \to j_1$, 0, 0, la distribution angulaire $I(\alpha,\beta,\gamma)$ a la forme suivante

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M,M'=-L}^{L} F^{(L)}(M,M') D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'} \quad . \qquad (7.26)$$

Notre but dans ce chapitre est le calcul de l'expression des termes $F^{(L)}(M,M')$ en fonction des paramètres multipolaires $t^{(L)}_{M}(p)$ de la matrice densité de la particule initiale et des paramètres qui caractérisent le processus de désintégration ; ainsi que l'étude des restrictions imposées aux moments $F^{(L)}(M,M')$ par la conservation de la parité dans la réaction de production et dans la désintégration. Dans le §8a nous discutons en détail le cas d'une particule de spin j qui se désintègre en trois particules sans spin ; dans le §8b, celui d'une particule de spin j qui se désintègre en une particule de spin j_1 et deux particules sans spin. La dépendance angulaire de la polarisation de la particule finale est calculée dans le §8c. Finalement, dans le §8d, nous discutons un test pour la détermination du spin des résonances baryoniques étranges se désintégrant en trois corps.

§8a. DISTRIBUTION ANGULAIRE POUR DES PROCESSUS DU TYPE j → 0, 0, 0. APPLICATIONS.

Nous avons dans ce cas pour l'amplitude de transition l'expression simple (voir le §7a)

$$T(stu\ ;\ \alpha\beta\gamma)_{\lambda} \;=\; D^{(j)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{\lambda}^{\lambda'} a_{\lambda'}(s,t,u)\ ; \qquad (8.1)$$

où, d'après (7.16),

$$a_{\lambda'}(stu) = \int d\Omega(\alpha\beta\gamma)\ T(stu\ ;\ \alpha\beta\gamma)_{\lambda}\ D^{(j)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{\lambda}_{\lambda'}\ ; \qquad (8.2)$$

et pour la densité de la probabilité de transition (7.20) on trouve, en tenant compte de (2.10) et (8.1), le résultat

$$I(\alpha\beta\gamma;stu)=\sqrt{2j+1}\sum_{L=0}^{2j}(2L+1)\bar{t}^{(L)}_{M}(p)D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'}\sum_{\lambda',\lambda''}\begin{pmatrix}M'\lambda' j\\ L\ j\ \lambda'\end{pmatrix}\frac{a_{\lambda'}(stu)\bar{a}_{\lambda''}(stu)}{\sum_{\lambda}\int_{D(stu)}dV(stu)|a_{\lambda}(stu)|^2} \qquad (8.3)$$

Appelons $\Gamma_{\lambda'\lambda''}$ les quantités

$$\Gamma_{\lambda'\lambda''} = \frac{\int_{D(stu)} a_{\lambda'}(stu)\bar{a}_{\lambda''}(stu)\,ds\,dt\,du\,\delta(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2)}{\sum_{\lambda}\int_{D(stu)}|a_{\lambda}(stu)|^2\,ds\,dt\,du\,\delta(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2)} \qquad (8.4)$$

et notons que,

$$\sum_{\lambda}\Gamma_{\lambda\lambda} \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\lambda'\lambda''} \;=\; \bar{\Gamma}_{\lambda''\lambda'}\ . \qquad (8.5a,b)$$

La distribution angulaire (7.26) est alors donnée par l'expression

$$I(\alpha\beta\gamma) \;=\; \sum_{L=0}^{2j}\ \sum_{M,M'=-L}^{L} X^{(L)}(M,M')D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'}\ , \qquad (8.6)$$

avec

$$X^{(L)}(M,M') = (2L+1)\bar{t}^{(L)}_{M}(p)\sqrt{2j+1}\sum_{\lambda',\lambda''}\begin{pmatrix} M'\lambda' j \\ L\ j\ \lambda'' \end{pmatrix} \Gamma_{\lambda'\lambda''} \ . \quad (8.7)$$

La conservation de la parité dans le processus (III.1) interdit la présence de certains des moments $X^{(L)}(M,M')$ dans la distribution angulaire (8.6). Dans une transition $j \to 0,0,0$ conservant la parité, l'application du théorème de Bohr[59] implique la relation[1]

$$T(s,t,u;\alpha,\beta,\gamma)_{\lambda} = \varepsilon\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3(-1)^{\lambda}\, T(s,t,u;\alpha+\pi,\beta,\gamma+\pi)_{\lambda} \ , \quad (8.8)$$

où ε, ε_i sont les parités intrinsèques des particules d'énergie-impulsion p,p_i, $i = 1,2,3$. On a alors, d'après la définition (8.2),

$$a_{\lambda}(s,t,u) = \omega \int d\Omega(\alpha\beta\gamma)(-1)^{\lambda'} T(s,t,u;\alpha+\pi,\beta,\gamma+\pi)_{\lambda'} D^{(j)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{\lambda'}_{\lambda} \ ,$$

où $\omega = \varepsilon\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3$. Dans cette intégrale nous pouvons faire le changement de variables : $\alpha' = \alpha+\pi$; $\beta' = \beta$; $\gamma' = \gamma+\pi$, et utiliser l'invariance de l'élément de volume $d\Omega$ et la propriété

$$D^{(j)}[R_{(\alpha'-\pi,\beta',\gamma'-\pi)}]^{\lambda'}_{\lambda} = (-1)^{-\lambda'-\lambda} D^{(j)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]^{\lambda'}_{\lambda} \ ;$$

on obtient ainsi la relation

$$(-1)^{\lambda} a_{\lambda}(s,t,u) = \omega a_{\lambda}(s,t,u) \ ; \quad (8.9)$$

c'est-à-dire : dans une transition $j \to 0,0,0$, les seules amplitudes $a_{\lambda}(s,t,u)$ permises par conservation de la parité sont celles avec λ pair (si $\omega = +1$) ou λ impair (si $\omega = -1$). Ceci implique pour les quantités $\Gamma_{\lambda'\lambda''}$ définies dans (8.4), les restrictions suivantes :

- dans le cas où $\omega = +1$, $\Gamma_{\lambda'\lambda''} = 0$, lorsque λ' ou(et) λ'' sont impaires ; (8.10a)
- dans le cas où $\omega = -1$, $\Gamma_{\lambda'\lambda''} = 0$, lorsque λ' ou(et) λ'' sont paires. (8.10b)

Notons aussi que d'après (8.7) : $M'+\lambda'-\lambda'' = 0$; en conséquence, dans les deux cas ($\omega = \pm 1$), M' est pair et <u>les moments $X^{(2)}(M,M')$ pour M' impair sont donc nuls</u> [un résultat qui peut-être obtenu directement à partir de (7.52), lorsqu'on impose $I(\alpha,\beta,\gamma) = I(\alpha,\beta,\gamma+\pi)^{(2)}$]. Rappelons-nous en outre que dans le cas où la particule p dans (III.1) est produite dans une réaction conservant la parité, on a $t_M^{(L)} = 0$ pour M impair (voir le §6a). On peut résumer ces propriétés dans l'énoncé suivant :

<u>La conservation de la parité dans la production de la particule p et dans le processus de désintégration</u> $p = p_1 + p_2 + p_3$, <u>correspondant à une transition</u> $j \to 0,0,0$, implique :

$$X^{(L)}(M,M') = 0, \quad \underline{\text{lorsque M ou(et) M' sont impairs}}. \tag{8.11}$$

Notons que les moments $X^{(L)}(0,0)$ sont proportionnels aux valeurs moyennes des polynômes de Legendre[3] de cos β,

$$\frac{1}{2L+1} X^{(L)}(0,0) = \langle P_L(\cos\beta)\rangle \cdot \tag{8.12}$$

Nous allons prouver que <u>les quantités</u> $\langle P_L(\cos\beta)\rangle$ <u>satisfont à l'inégalité</u>,

$$\sum_{L=0}^{2j} (2L+1)\langle P_L(\cos\beta)\rangle \leq 2j+1 \quad . \tag{8.13}$$

Par définition,

$$X^{(L)}(0,0) = (2L+1)\, t_0^{(L)} \sqrt{2j+1} \sum_\lambda \begin{pmatrix} 0 & \lambda & j \\ L & j & \lambda \end{pmatrix} \Gamma_{\lambda,\lambda} \ ,$$

et

$$\rho(p)^\lambda{}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{L=0}^{2j} (2L+1)\, t_0^{(L)}(p) \begin{pmatrix} 0 & \lambda & j \\ L & j & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2j+1} \sum_{L=0}^{2j} X^{(L)}(0,0) = \sum_\lambda \rho^\lambda{}_\lambda \Gamma_{\lambda\lambda} \quad . \tag{8.14}$$

Mais $\rho(p)^{\lambda}_{\lambda} \geq 0$ (voir le §2a), et d'après (8.4), $0 \leq \Gamma_{\lambda\lambda} \leq 1$. Par application de l'inégalité de Schwartz on a donc

$$(\sum_{\lambda} \rho(p)^{\lambda}_{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda})^2 \leq \sum_{\lambda} \rho\ (p)^{\lambda}_{\lambda}{}^2 \sum_{\lambda} \Gamma^2_{\lambda\lambda} \quad ,$$

et puisque $\sum_{\lambda} \rho\ ^{\lambda^2}_{\lambda} \leq \sum_{\lambda} \rho^{\lambda}_{\lambda} = 1$; et $\sum_{\lambda} \Gamma^2_{\lambda\lambda} \leq \sum_{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda} = 1$, on peut conclure $\sum_{\lambda} \rho(p)^{\lambda}_{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda} \leq 1$, d'où la relation (8.13).

Voyons quelques <u>applications</u> des résultats précédents à des exemples de désintégrations du type $j \to 0,0,0$:

(a) une <u>transition $0^+ \not\to 0^-, 0^-, 0^-$</u> est interdite par conservation de parité ;

(b) dans une <u>transition $0^- \to 0^-, 0^-, 0^-$</u>, la distribution angulaire $I(\alpha\beta\gamma)$ est isotrope, $X^{(0)}(0,0) = 1$.

(c) considérons une <u>transition $1^- \to 0^-, 0^-, 0^-$</u> ; par exemple la désintégration

$$\omega \to \pi^+ + \pi^o + \pi^- \quad . \tag{8.15}$$

D'après (8.10a) on a

$$\Gamma_{\lambda',\lambda''} = \delta_{\lambda',0} \cdot \delta_{\lambda'',0} \quad , \tag{8.16}$$

c'est-à-dire,

$$X^{(L)}(M,M' \neq 0) = 0 \quad ; \tag{8.17}$$

et, en particulier pour $L = 1$, [voir (8.7)]

$$X^{(1)}(M,0) = 3\sqrt{3}\ \bar{t}^{(1)}_{M}(p) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{8.18}$$

Tenant compte encore du fait que le ω est produit dans des réactions conservant la parité, on a en plus

$$X^{(L)}(M \text{ impair}, 0) = 0 \quad ; \tag{8.19}$$

et les seuls moments de la distribution $I(\alpha,\beta,\gamma)$, a priori non nuls, sont donc

$$X^{(2)}(2,0) \; ; \; X^{(2)}(0,0) \; ; \text{ et } X^{(2)}_{(-2,0)} = \overline{X^{(2)}(2,0)} \quad .$$

D'après la formule (8.7) on trouve pour ces quantités les valeurs

$$X^{(2)}(M,0) = -\sqrt{10}\ \bar{t}^{(2)}_{M} \quad . \tag{8.20}$$

Nous voyons donc que <u>dans une désintégration du type $1^- \to 0^-, 0^-, 0^-$, l'analyse de la distribution angulaire de la normale au plan de désintégration par rapport à un certain trièdre de référence permet de mesurer les paramètres</u>

$$t^{(2)}_{0} = -\sqrt{5/2}\ \langle P_2(\cos\beta)\rangle \text{ et } \bar{t}^{(2)}_{\pm 2} = -\sqrt{2\pi}\langle Y^{(2)}_{\pm 2}(\beta,\alpha)\rangle \tag{8.21a,b}$$

<u>de la matrice-densité de la particule initiale</u>. La forme explicite de $I(\alpha,\beta,\gamma)$ pour un processus $1^- \to 0^-, 0^-, 0^-$ est

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\ t^{(2)}_{0}(1-3\cos^2\beta) - \sqrt{15}\ \sin^2\beta\,(\mathrm{Re}\ t^{(2)}_{2}\cos 2\alpha + \mathrm{Im}\ t^{(2)}_{2}\sin 2\alpha) \; . \tag{8.22}$$

(d) Dans le cas d'une <u>transition $^{(4)}$ $1^+ \to 0^-, 0^-, 0^-$</u>, on peut construire avec les quantités $\Gamma_{\lambda',\lambda''}$ non nulles [λ' et λ'' impaires d'après (8.10b)] une matrice

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{1,1} & 0 & \Gamma_{1,-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{-1,1} & 0 & \Gamma_{-1,-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \Gamma_{1,1} + \Gamma_{-1,-1} = 1 \; ; \text{ et } \Gamma_{1,-1} = \bar{\Gamma}_{-1,1} \tag{8.23}$$

Les moments de $I(\alpha,\beta,\gamma)$, a priori non nuls, sont dans ce cas $X^{(1)}(M,0)$; et $X^{(2)}(M,\pm 2)$, $X^{(2)}(M,0)$. D'après (8.7) ils ont les valeurs

$$X^{(1)}(M,0) = 3/\sqrt{2}\ \bar{t}^{(1)}_{M}[\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1}] \tag{8.24}$$

et

$$X^{(2)}(M,2) = \sqrt{15}\ \bar{t}^{(2)}_{M}\bar{\Gamma}_{1,-1}\ ;\ X^{(2)}(M,0) = \sqrt{\frac{5}{2}}\ \bar{t}^{(2)}_{M}\ ;\ X^{(2)}(M,-2) = \sqrt{15}\ \bar{t}^{(2)}_{M}\Gamma_{1,-1}$$

(8.25a,b,c)

Nous voyons donc que <u>dans une transition $1^+ \to 0^-, 0^-, 0^-$, l'analyse de la distribution angulaire du trièdre de désintégration (III.8) par rapport au trièdre de référence $\vec{n}$ permet de mesurer les paramètres</u> :

$$\bar{t}^{(1)}_{M}[\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1}] = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{4\pi}\ \langle Y^{(1)}_{-M}(\beta,\alpha)\rangle \quad ; \tag{8.26}$$

et

$$\mathrm{Re}\ \Gamma_{1,-1} = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\ \frac{\langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{-2}\rangle + \langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{2}\rangle}{2\langle Y^{(2)}_{-M}(\beta,\alpha)\rangle} \ , \tag{8.27a}$$

$$\mathrm{Im}\ \Gamma_{1,-1} = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\ \frac{\langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{-2}\rangle - \langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{2}\rangle}{2\langle Y^{(2)}_{-M}(\beta,\alpha)\rangle} \ , \tag{8.27b}$$

$$\bar{t}^{(2)}_{M} = \sqrt{8\pi}\ \langle Y^{(2)}_{-M}(\beta,\alpha)\rangle \ . \tag{8.28}$$

L'expression de la distribution angulaire $I(\alpha\beta\gamma)$ pour un processus du type $1^+ \to 0^-, 0^-, 0^-$ est donc

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = 1 + \sum_{M}\ \{\sqrt{4\pi}[\sqrt{\frac{3}{2}}(\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1})\ t^{(1)}_{-M}Y^{(1)}_{M}(\beta,\alpha) + \frac{t^{(2)}_{-M}}{\sqrt{2}}\ Y^{(2)}_{M}(\beta,\alpha)] +$$

$$+ \sqrt{15}\ \bar{t}^{(2)}_{M}[\bar{\Gamma}_{1,-1}D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{2} + \Gamma_{1,-1}\ D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{-2}]\ \} \ . \tag{8.29}$$

Nous voyons que dans le cas d'une désintégration $1^+ \to 0^-, 0^-, 0^-$, l'analyse de la distribution $I(\alpha,\beta,\gamma)$ permet de mesurer les paramètres :

$$\bar{t}^{(2)}_{M} \quad ; \quad \mathrm{Re}\ \Gamma_{1,-1} \quad ; \quad \mathrm{Im}\ \Gamma_{1,-1} \quad ;$$

et le "produit"

$$t^{(1)}_{M}\ [\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1}] \ .$$

On peut encore mesurer $t^{(1)}_M$ "à un signe près"[5] si on a un nombre suffisant d'évènements pour déterminer une densité de probabilité conditionnelle (voir le §7c).

$$I(\alpha\beta\gamma|stu) = \frac{I(\alpha\beta\gamma;stu)}{I(stu)} \quad . \tag{7.28}$$

En effet, soit

$$A(stu) = \frac{|a_1(stu)|^2 - |a_{-1}(stu)|^2}{|a_1(stu)|^2 + |a_{-1}(stu)|^2} \quad ; \tag{8.30a}$$

$$B(stu) = \frac{2Re\ a_1(stu)\overline{a_{-1}(stu)}}{|a_1(stu)|^2 + |a_{-1}(stu)|^2} \quad ; \tag{8.30b}$$

$$C(stu) = \frac{2Im\ a_1(stu)\overline{a_{-1}(stu)}}{|a_1(stu)|^2 + |a_{-1}(stu)|^2} \quad . \tag{8.30c}$$

On a

$$A^2(stu) + B^2(stu) + C^2(stu) = 1 \quad . \tag{8.31}$$

Appelons $< >_{stu}$ la moyenne par rapport à $I(\alpha\beta\gamma|stu)$.

On a alors,

$$B(stu) = \sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\ \frac{< D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^M_{-2}>_{stu} + < D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^M_{2}>_{stu}}{<Y^{(2)}_{-M}(\beta,\alpha)>_{stu}} \quad ; \tag{8.32a}$$

$$C(stu) = \sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\ \frac{< D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^M_{-2}>_{stu} - < D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^M_{2}>_{stu}}{<Y^{(2)}_{-M}(\beta\alpha)>_{stu}} \quad ; \tag{8.32b}$$

et d'après (8.31), A(stu) est déterminé au signe près. En outre,

$$A(stu)\ \bar{t}^{(1)}_M = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{4\pi}\ <Y^{(1)}_{-M}(\beta,\alpha)>_{stu} \quad , \tag{8.33}$$

ce qui permet de déterminer $\bar{t}^{(1)}_M$ "au signe près".

§8b. DISTRIBUTION ANGULAIRE POUR DES PROCESSUS DU TYPE $j \to j_1,0,0$.

L'amplitude de transition pour une désintégration du type $j \to j_1,0,0$, est celle donnée par l'expression (7.17) pour $j_2 = j_3 = 0$:

$$T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1}_{\lambda} = \sum_l \sqrt{2l+1}\; D^{(j_1)}[R(u,u_1)]^{\lambda_1}_{\nu_1} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m' \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m}_{m'}\; a^{(l)}_{m}(s,t,u) \quad . \tag{8.34}$$

A l'aide des fonctions $a^{(l)}_{m}(s,t,u)$ nous avons défini dans (7.27) les quantités $\Gamma(\tilde{l},l)_{\tilde{m},m}$. Notons qu'elles satisfont aux relations

$$\sum_{l,m} \Gamma(l,l)_{m,m} = 1 \tag{8.35}$$

et

$$\Gamma(\tilde{l},l)_{\tilde{m},m} = \overline{\Gamma(l,\tilde{l})_{m,\tilde{m}}} \tag{8.36}$$

La <u>distribution angulaire</u> $I(\alpha,\beta,\gamma)$ des évènements finaux est obtenue à l'aide de (8.34) par substitution dans la formule (7.20) et tenant compte des relations (2.10) et (7.22). Le calcul explicite est fait dans l'appendice A.8. Nous donnons ci-dessous le résultat final,

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M,M'=-L}^{L} Y^{(L)}(M,M')\; D^{(L)}[R_{(\alpha,\beta,\gamma)}]^{M}_{M'} \quad , \tag{8.37}$$

avec

$$Y^{(L)}(M,M') = (2L+1)\, \bar{t}^{(L)}_{M}(p) \sum_{l,\tilde{l}} \sqrt{(2l+1)(2j+1)(2\tilde{l}+1)}\; (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} \begin{Bmatrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \sum_{\tilde{m}m} \begin{pmatrix} M' & \tilde{l} & m \\ M & \tilde{m} & l \end{pmatrix} \Gamma(\tilde{l},l)_{\tilde{m},m} \; . \tag{8.38}$$

La <u>conservation de la parité</u> dans le processus de désintégration implique

$$Y^{(L)}(M,\ M' \text{ impair}) = 0 \quad . \tag{8.39}$$

On trouve cette restriction lorsqu'on impose dans l'expression (8.37) la condition[2] $I(\alpha,\beta,\gamma) = I(\alpha,\beta,\gamma+\pi)$; ou indirectement par application du théorème de Bohr[59] aux amplitudes $A(p_1,p_2,p_3)^{\nu_1}_{\lambda}$:

$$A(\alpha,\beta,\gamma;s,t,u)^{\nu_1}_{\lambda} = \varepsilon\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3(-1)^{\lambda-\nu_1} A(\alpha+\pi,\beta,\gamma+\pi;s,t,u)^{\nu_1}_{\lambda} ,$$

ce qui implique, tenant compte de (7.8),

$$A^{(l)}_{m}(\alpha,\beta,\gamma;s,t,u) = \omega(-1)^m A^{(l)}_{m}(\alpha+\pi,\beta,\gamma+\pi;s,t,u)$$

avec $\omega = \varepsilon\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3$, et d'après la définition des amplitudes invariantes [voir (7.16a)]

$$(-1)^m a^{(l)}_{m}(s,t,u) = \omega\, a^{(l)}_{m}(s,t,u) \quad . \tag{8.40}$$

On a ainsi pour les paramètres $\Gamma(\tilde{l},l)_{\tilde{m},m}$ [voir (7.27)] :

$$\Gamma(\tilde{l},l)_{\tilde{m},m} = 0, \quad \text{pour } \tilde{m} \text{ et(ou) } m \text{ impairs, si } \omega = +1 \ ; \tag{8.41a}$$

$$\Gamma(\tilde{l},l)_{\tilde{m},m} = 0, \quad \text{pour } \tilde{m} \text{ et(ou) } m \text{ pairs, si } \omega = -1 \ . \tag{8.41b}$$

Dans tous les cas $M' = \tilde{m} - m$ est pair, d'où la conclusion (8.39) .

Voyons quel est le nombre d'amplitudes invariantes $a^{(l)}_{m}(s,t,u)$ dans le cas $j_1 = 1/2$. On a alors

$$l = j - 1/2 \quad \text{et} \quad l = j + 1/2$$

avec m pair ou impair ; c'est-à-dire

$$\text{nombre d'amplitudes} = \tfrac{1}{2}[2(j-1/2) + 1 + 2(j + 1/2) + 1] = 2j + 1. \tag{8.42}$$

§8c. DEPENDANCE ANGULAIRE DES PARAMETRES MULTIPOLAIRES DE LA PARTICULE FINALE:

Considérons l'ensemble des particules de spin j_1 produites dans une transition

$$p = p_1, p_2, p_3 \qquad (j \to j_1, 0, 0) \quad . \tag{8.43}$$

Il est clair que les paramètres multipolaires des particules de spin j_1 dépendent de la direction de production de p_1. Formellement, la dépendance angulaire de la matrice-densité des particules de spin j_1 est donnée par l'expression

$$\rho_1(\alpha\beta\gamma) = \int dV(stu)\ I(\alpha\beta\gamma;stu)\ \frac{T(\ldots)\rho_{in}\ T(\ldots)^*}{\mathrm{tr}\ T(\ldots)\rho_{in}\ T(\ldots)^*} =$$

$$= \frac{\int dV(stu)\ T(\ldots)\ \rho_{in}\ T^*(\ldots)}{\int dV d\Omega \mathrm{tr}\ T\rho\ T^*} \quad ; \tag{8.44}$$

avec, d'après (7.22),

$$\mathrm{tr}\ \rho_1(\alpha\beta\gamma) = I(\alpha\beta\gamma) \quad . \tag{8.45}$$

La dépendance en α,β,γ des paramètres multipolaires de p_1,

$$t^{(L')}_{M'}(\alpha\beta\gamma) \quad \text{avec} \quad 0 \le L' \le 2j_1 \ \text{et} \ -L' \le M' \le L' \quad ,$$

est alors donnée, d'après (2.8), par

$$\tilde{t}^{(L')}_{M'}(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{2j_1+1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & L' & j_1 \\ j_1 & M' & \lambda_1 \end{pmatrix} \frac{\rho_1(\alpha\beta\gamma)^{\lambda_1}_{\tilde{\lambda}_1}}{I(\alpha\beta\gamma)} . \tag{8.46}$$

Voyons quelle est la forme explicite de cette expression. En portant les équations (2.10) et (8.34) dans (8.44) on trouve après quelques

manipulations algébriques analogues à celles effectuées dans le §5b, le résultat suivant

$$I(\alpha\beta\gamma)\ \overline{t^{(L')}_{M'}}(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)}\ \sum_{L,\tilde{L}} (2\tilde{L}+1)(2L+1)\ \times$$

$$\times \begin{pmatrix} L & j & j \\ \tilde{L} & \tilde{1} & 1 \\ L' & j_1 & j_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \tilde{L} & M \\ M'' & \tilde{M} & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & m' & \tilde{M}' \\ \tilde{m}' & 1 & \tilde{L} \end{pmatrix} \overline{t^{(L)}_{M}} \quad .$$

$$\times\ D^{(L')}[R(u_1,u)]^{M''}_{M'}\ D^{(\tilde{L})}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{\tilde{M}}_{\tilde{M}'}\ \Gamma(1,\tilde{1})_{m',\tilde{m}'} \quad . \qquad (8.47)$$

En particulier, pour L' = 1, ce résultat nous donne la dépendance angulaire de la polarisation da la particule finale $\sigma_\mu(\alpha\beta\gamma)$.

Dans la pratique il convient d'utiliser une polarisation normalisée (voir le chapitre 2 et le §5b).

$$\hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{2j_1+1}{3}\ (j_1+1)}\ \sigma_\mu(\alpha\beta\gamma) \quad . \qquad (8.48)$$

En utilisant la formule (2.29) pour L = 1, avec

$$\vec{s}_{1\mu} = (\Lambda_{t\to u_1}\ \vec{n})_\mu \quad , \qquad (8.49)$$

on a d'après (8.47)

$$I(\alpha\beta\gamma)\ \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{4\pi}\ \sqrt{\frac{2j+1}{j_1}}\ \sum_{L,\tilde{L}}\ \sum_{1,\tilde{1}} (2L+1)(2\tilde{L}+1) \begin{pmatrix} L & j & j \\ \tilde{L} & \tilde{1} & 1 \\ 1 & j_1 & j_1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sum_M \begin{pmatrix} M'' & \tilde{L} & L \\ 1 & \tilde{M} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & m' & \tilde{M}' \\ \tilde{m}' & 1 & \tilde{L} \end{pmatrix} Y^{(1)}_{M'}(\vec{s}_{1\mu}) D^{(1)}[R_{(u,u_1)}]^{M'}_{M''} t^{(L)}_{M} D^{(\tilde{L})}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{\tilde{M}}_{\tilde{M}'}\ \Gamma(\tilde{1},1)_{\tilde{m}',m'} . \qquad (8.50)$$

A partir de cette formule, nous pouvons calculer par exemple, la valeur moyenne de $\hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma)$ par rapport à la distribution angulaire $I(\alpha\beta\gamma)$,

$$< \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) > \;=\; \int d\Omega(\alpha\beta\gamma)\; I(\alpha\beta\gamma)\; \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) \;=$$

$$= \sqrt{4\pi}\,\sqrt{\frac{2j+1}{j_1}} \sum_M D^{(1)}[R(u,u_1)]^{M'}_{M}\; Y^{(1)}_{M'}\,(\vec{s}_{1\mu})\; t^{(1)}_{M} \quad x$$

$$x \sum_l \sqrt{\frac{3}{2l+1}} \begin{Bmatrix} 1 & j & j \\ 0 & l & l \\ 1 & j_1 & j_1 \end{Bmatrix} \sum_m \Gamma(l,l)_{m,m} \quad ; \qquad (8.51)$$

et en utilisant la formule (A1.K) ,

$$< \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) > \;=\; \sqrt{4\pi}\,\sqrt{\frac{2j+1}{j_1}} \sum_M D^{(1)}[R(u,u_1)]^{M'}_{M}\; Y^{(1)}_{M'}\,(\vec{s}_{1\mu})\; t^{(1)}_{M} \quad x$$

$$x \sum_l \frac{1}{2l+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j & l \\ j & j_1 & 1 \end{Bmatrix} \sum_m \Gamma(l,l)_{m,m} \quad . \qquad (8.52)$$

Dans le cas où $j_1 = 1/2$ on a

$$l = l_+ = j + 1/2 \quad \text{et} \quad l = l_- = j - 1/2 \quad ,$$

et d'après (8.35)

$$\Gamma_+ + \Gamma_- = 1 \quad , \qquad (8.53a)$$

avec

$$\Gamma_+ = \sum_m \Gamma(j + 1/2,\; j + 1/2)_{m,m} \quad , \qquad (8.53b)$$

et

$$\Gamma_- = \sum_m \Gamma(j - 1/2,\; j - 1/2)_{m,m} \quad . \qquad (8.53c)$$

En portant ces expressions dans (8.52) on trouve

$$< \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) > \;=\; \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_M D^{(1)}[R(u,u_1)]^{M'}_{M}\; Y^{(1)}_{M'}\,(\vec{s}_{1\mu})\; t^{(1)}_{M} \quad x$$

$$x \left\{ \frac{\Gamma_+}{2j+2}\,\sqrt{\frac{j}{j+1}} + \frac{\Gamma_-}{2j}\,\sqrt{\frac{j+1}{j}} \right\} \quad , \qquad (8.54)$$

formule que nous allons appliquer à la détermination du spin dans le paragraphe suivant.

Il est peut être intéressant de discuter la covariance de la formule (8.54). L'expression de $t^{(1)}_M$ en fonction de la polarisation normalisée $\hat{\sigma}_\nu$ de la particule initiale est d'après (2.29) et (8.48)

$$t^{(1)}_M = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{\frac{2j+1}{3}j}\ \sigma_\nu\ \bar{Y}^{(1)}_M(\vec{s}^\nu) \quad , \tag{8.55}$$

avec

$$\vec{s}^\nu = (\Lambda_{t\to u}\ \vec{n})^\nu \quad .$$

Un choix convenable de la tétrade de référence consiste à prendre t = u. Alors on a simplement

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\ \sum_M D^{(1)}[R(u,u_1)]^{M'}_M\ Y^{(1)}_{M'}(\vec{s}_{1\mu})\ t^{(1)}_M =$$

$$= -\sqrt{\frac{2j+1}{3}j}\ \ s_{1\mu}\ \ \hat{\sigma}_\nu\ s^\nu \quad ,$$

avec

$$s_{1\mu} = (\Lambda_{u\to u_1}\ s)_\nu \quad ;$$

où $s_\nu = n^{(3)}_\nu$ est l'axe de quantification de la particule initiale ; et la formule (8.54) s'exprime ainsi

$$s_1^\mu < \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) > = \sqrt{\frac{2j+1}{3}j}\ \ s^\nu\hat{\sigma}_\nu \left\{ \frac{\Gamma_+}{2j+2}\sqrt{\frac{j}{j+1}} + \frac{\Gamma_-}{2j}\sqrt{\frac{j+1}{j}} \right\} . \tag{8.56}$$

§8d. TEST POUR LA DETERMINATION DU SPIN.

Par rapport à la tétrade de référence où t = u, appelons $< \xi_{tr}(\alpha\beta\gamma) >$ la composante

$$< \xi_{tr}(\alpha\beta\gamma) > \; = \; - \, s_1^{\mu} < \hat{\sigma}_{\mu}(\alpha\beta\gamma) > \qquad . \tag{8.57}$$

On a d'après (8.54) ,

$$< \xi_{tr}(\alpha\beta\gamma) > \; = \; t_0^{(1)} \left\{ \frac{\Gamma_+}{2j+2} \sqrt{\frac{j}{j+1}} + \frac{\Gamma_-}{2j} \sqrt{\frac{j+1}{j}} \right\} \qquad . \tag{8.58}$$

Rappelons (voir le chapitre 2) que $t_0^{(1)}$ a la borne supérieure suivante

$$| t_0^{(1)} | \; \leq \; \sqrt{2j+1} \; \max_{\lambda \in (-j, \ldots, j)} \left| \begin{pmatrix} \lambda & 1 & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \; = \; \sqrt{\frac{j}{j+1}} \qquad . \tag{8.59}$$

On a alors pour $|< \xi_{tr}(\alpha\beta\gamma) >|$:

$$|< \xi_{tr}(\alpha\beta\gamma) >| \; \leq \; \left| \frac{\Gamma_-}{2j} + \frac{\Gamma_+}{2j+2} \frac{j}{j+1} \right| \; = \; \frac{1}{2j+2} \left| \frac{j+1}{j} \Gamma_- + \frac{j}{j+1} \Gamma_+ \right| \leq$$

$$\leq \; \frac{1}{2j+2} \; \frac{j+1}{j} \; (\Gamma_- + \Gamma_+) \; = \; \frac{1}{2j} \qquad . \tag{8.60}$$

Cette borne fournit un test pour la détermination du spin j d'une particule Y* telle que[6]

$$Y^* \; \rightarrow \; Y + \pi + \pi \qquad ,$$

où Y est un baryon Λ, Σ^+ où Ξ. En effet, si Y se désintègre faiblement dans

$$Y \; \rightarrow \; B + \pi_1 \qquad ,$$

avec un paramètre d'asymétrie $\alpha_y \neq 0$ [voir la définition dans (5.26b)],

on a d'après (5.27)

$$< \cos \theta >_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3} \alpha_Y \xi_{tr}(\alpha\beta\gamma) \quad ,$$

avec

$$\cos \theta = -2M_Y \Delta^{-1/2}(M_Y, M_B, M_{\pi_1})(p_B . s_1) \quad .$$

La moyenne de $< \cos \theta >_{\alpha\beta\gamma}$ par rapport à $I(\alpha\beta\gamma)$ est

$$< <\cos \theta>_{\alpha\beta\gamma} > = \int d\Omega(\alpha\beta\gamma)\ I(\alpha\beta\gamma) <\cos \theta>_{\alpha\beta\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha_Y}{3} <\xi_{tr}(\alpha\beta\gamma)> \quad ; \tag{8.61}$$

et d'après (8.60)

$$| < <\cos \theta>_{\alpha\beta\gamma} > | \leq \frac{|\alpha_Y|}{6j} \leq \frac{1}{6j} \quad . \tag{8.62}$$

Dans les cas où $|<<\cos \theta>_{\alpha\beta\gamma}>| \neq 0$ l'inégalité (8.62) fournit une borne supérieure du spin j. Ce test est en quelque sorte analogue à celui de Lee et Yang [58], voir (5.28), pour les désintégrations en deux corps.

N O T E S
(Chapitre VIII)

(1) En effet, soit $\Sigma_n(3)$ l'opération de symétrie pour l'hyperplan orthogonal à $n^{(3)}$, [voir (1.19)]. La loi de transformation d'un état à une particule induite par l'opération $\Sigma_n(3)$ est d'après (1.71) et (1.76)

$$U(\Sigma_n(3))|p,j\lambda> = \varepsilon\, D^{(j)}[R_{(\pi,o,o)}]^{\lambda'}{}_{\lambda}|\Sigma_n(3)p,j\lambda'> =$$

$$= \varepsilon\,(-1)^{\lambda}|\Sigma_n(3)p,j\lambda> \quad ;$$

et l'invariance de $T(p_1,p_2,p_3)_\lambda$ par rapport à $\Sigma_n(3)$ implique donc,

$$T(p_1,p_2,p_3)_\lambda = \varepsilon\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3\,(-1)^{\lambda}\,T(\Sigma_n(3)p_1,\ \Sigma_n(3)p_2,\ \Sigma_n(3)\,p_3)_\lambda \ .$$

Soient $(s,t,u;\alpha,\beta,\gamma)$ les paramètres qui spécifient la configuration définie par p_1,p_2,p_3. Les paramètres correspondant à la configuration $(\Sigma_n(3)p_1,\ \Sigma_n(3)p_2,\ \Sigma_n(3)p_3)$ sont alors $(s,t,u;\alpha+\pi,\beta,\gamma+\pi)$, d'où la relation (8.8).

(2) L'argument $(\alpha,\beta,\gamma+\pi)$ correspond aux angles d'Euler de la rotation qui amène le trièdre $\vec{n}$ au trièdre $\{\Lambda^{-1}_{t\to Pu}\,Px_i\}$ $i = 1,2,3$; où P est l'opération d'inversion d'espace.

(3) Rappelons que $D^{(1)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{o}{}_{o} = P_1\ (\cos\beta)$ [voir(1.54)].

(4) Un candidat possible est la désintégration $D(1286) \to K\bar{K}\pi$.

(5) A ce propos,nous ne sommes pas d'accord avec Berman et Jacob [65]. Ces auteurs prétendent que dans une désintégration $1^+ \to 0^-,0^-,0^-$, l'analyse de la distribution $I(\alpha\beta\gamma)$ permet la détermination de "tous" les éléments de la matrice-densité de la particule initiale.

(6) Par exemple $Y_1^*(1660) \to Y + \pi + \pi$; $\Xi^*(1816) \to \Xi + \pi + \pi$.

A P P E N D I C E A8

CALCUL DE LA DISTRIBUTION ANGULAIRE $I(\alpha,\beta,\gamma)$ POUR DES PROCESSUS DU TYPE $j \to j_1,0,0$

Le point de départ est l'expression (7.20) pour $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

$$I(\alpha,\beta,\gamma\ ;s,t,u) = \frac{\sum_{\lambda',\lambda,\lambda_1} T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1}_{\lambda}\ \rho(p)^{\lambda}_{\lambda'}\ \overline{T(p_1,p_2,p_3)^{\lambda_1}_{\lambda'}}}{\int dV d\Omega\ \mathrm{tr}\ T\rho T^*}, \tag{A8.a}$$

avec

$$\rho(p)^{\lambda}_{\lambda'} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \sum_{L,M} (2L+1)\ \overline{t^{(L)}_{M}}(p)\ \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \lambda' \end{pmatrix} \quad ; \tag{2.10}$$

et

$$T(p_1p_2p_3)^{\lambda_1}_{\lambda} = \sum_{l} \sqrt{2l+1}\ D^{(j_1)}[R_{(u,u_1)}]^{\lambda_1}_{\nu_1} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m' \\ j_1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m}_{m'}\ a^{(l)}_{m}(s,t,u). \tag{8.34}$$

Calcul du numérateur de $I(\alpha,\beta,\gamma;s,t,u)$ dans (A8.a) :

$$\sum_{\lambda',\lambda,\lambda_1} T(\ldots)^{\lambda_1}_{\lambda}\ \rho^{\lambda}_{\lambda'}\ \overline{T(\ldots)^{\lambda_1}_{\lambda'}} =$$

$$= \sum_{l,L,\tilde{l}} \sqrt{\frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{2j+1}} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m'' \\ j_1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' & j_1 & \tilde{l} \\ j & \nu_1 & m'' \end{pmatrix} (-1)^{-j+j_1+\tilde{l}} \quad x$$

$$x \sum_{m,\tilde{m}} (2L+1)\ D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m}_{m'}\ D^{(\tilde{l})}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{m''}_{\tilde{m}}\ \bar{a}^{(l)}_{m}(stu)\ a^{(\tilde{l})}_{\tilde{m}}(stu)\ \bar{t}^{(L)}_{M}(p) =$$

$$= \sum_{l,L,\tilde{l}} \sqrt{\frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{2j+1}}\ (2L+1) \begin{Bmatrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \sum_{m,\tilde{m}} \begin{pmatrix} \tilde{l} & m & M' \\ \tilde{m} & l & L \end{pmatrix} D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^{M}_{M'} \quad x$$

$$x \quad (-1)^{j+j_1+\tilde{l}}\ \bar{t}^{(L)}_{M}(p)\ a^{(l)}_{m}(stu)\ \bar{a}^{(\tilde{l})}_{\tilde{m}}(stu) \quad , \tag{A8.b}$$

où on a utilisé (1.62), (1.51a,b) et (A1.c).

Voyons ensuite quelle est l'expression explicite pour $\int dV d\Omega \, tr T\rho T^*$:

$$\int d\Omega \, tr T\rho P^* = \sum_{l,m} \frac{2l+1}{\sqrt{2j+1}} \begin{Bmatrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \sum_m \begin{pmatrix} l & m & 0 \\ m & l & 0 \end{pmatrix} (-1)^{j+j_1+l} \times |a_m^{(l)}(stu)|^2 ;$$

mais

$$\begin{Bmatrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j+j_1+l}}{\sqrt{(2l+1)(2j+1)}} \quad \text{et} \begin{pmatrix} l & m & 0 \\ m & l & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} .$$

On a donc

$$\int d\Omega \; tr \; T\rho T^* = \frac{1}{2j+1} \sum_{l,m} |a_m^{(l)}(stu)|^2 , \qquad \text{(A8.c)}$$

et finalement

$$\int dV d\Omega \; tr \; T\rho T^* = \chi^{-1} \frac{1}{2j+1} \int_{D(stu)} dsdtdu \sum_{l,m} |a_m^{(l)}(stu)|^2 \; \delta(s+t+u-m^2-\Sigma m^2), \qquad \text{(A8.d)}$$

avec

$$\chi = \int_{D(stu)} dsdtdu \; \delta(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2) . \qquad \text{(A8.e)}$$

Nous pouvons maintenant calculer $I(\alpha\beta\gamma)$ en utilisant la formule (7.22) et les résultats (A8.b) et (A8.d). On trouve ainsi

$$I(\alpha\beta\gamma) = \sum_L (2L+1) \, \bar{t}_M^{(L)} \sum_{l,\tilde{l}} \sqrt{(2l+1)(2j+1)(2\tilde{l}+1)} \; (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} \begin{Bmatrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\times \sum_{m,\tilde{m}} \begin{pmatrix} M' & \tilde{l} & m \\ L & \tilde{m} & l \end{pmatrix} D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]^M_{M'} \frac{\int_{D(stu)} dV(stu) \; \bar{a}_{\tilde{m}}^{(\tilde{l})}(stu) \; a_m^{(l)}(stu)}{\sum_{l,m} \int_{D(stu)} dV(stu) |a_m^{(l)}(stu)|^2} , \qquad \text{(A8.f)}$$

d'où les résultats (7.26), (7.27) ; et (8.37), (8.38) dans le texte.
En utilisant (7.21) et les formules (A8.b) et (A8.d) on trouve encore

$$I(stu) = \frac{\sum_{l,m} |a_m^{(l)}(stu)|^2}{\sum_{l,m} \int_{D(stu)} dV(stu) |a_m^{(l)}(stu)|^2} . \qquad (7.25)$$

B I B L I O G R A P H I E

ABOLINS M., (Voir Lander), (1964).

ADAIR R. Phys. Rev. 100, 1540 (1955).

ADEMOLLO M. et GATTO R., Phys. Rev. 133, B 531 (1964a).

ADEMOLLO M., GATTO R. et PREPARATA G., Phys. Rev. Let. 12, 462 (1964b).

ADEMOLLO M., GATTO R. et PREPARATA G., Phys. Rev. 140, B 192 (1965)

ALITTI J., BATON J.P., DELER B., NEVEA-RENE M., CRUSSARD J., GINESTET J., TRAN A.M., GESSAROLI R., ROMANO A., Phys. Letters 15, 69 (1965)

ALFF C., GELFAND N., NAUENBERG U., NUSSBAUM M., SCHULTZ J., BRUGGER H., STEINBERGER J., KIRSCH L., PLANO R., BERLEY D. et PRODELL A., Phys. Rev. 137, B 1105 (1965).

BARBARO-GALTIERI A., (Voir Rosenfeld) (1965).

BARGMANN V., Ann. Math. 48, 568 (1947).

BARGMANN V. et WIGNER E.P., Proc. Nat. Acad. Sc. 34, 211, (1948).

BARGMANN V., Rev. Mod. Physics 34, 829 (1964a).

BARGMANN V., Jour. Math. Phys. 5, 862 (1964b).

BARKAS N.H., (Voir Rosenfeld) (1965).

BASTIEN P.L., (Voir Rosenfeld) (1965).

BATON J.P., (Voir Alitti) (1965).

BERLEY D., (Voir Alff). (1965).

BERMAN S.M. et JACOB M., Phys. Rev. 139, B 1023 (1965).

BESSIS D., ITZYKSON C. et JACOB M., Nu. Cim. 27, 376 (1963).

BIVINS R., (Voir Rotenberg) (1961).

BOHR A., Nuc. Phys. 10, 486 (1959).

BROWN J.L., (Voir Goldhaber) (1964).

BRUGGER H., (Voir Alff) (1965).

BURNSTEIN R.A., (Voir Courant) (1963).

BUTTON-SHAFER J., Phys. Rev. 139, B 607 (1965).

BYERS N. et FENSTER S., Phys. Rev. Let. 11, 52 (1963).

BYERS N. et YANG C.N., Rev. Mod. Physics 36, 595 (1964).

CARMONY D.D., (Voir Lander) (1964).

CARTAN E., La théorie des Spineurs (Hermann, Paris 1937)

De CELLES P.C., (Voir Durand III) (1962).

CHEW G.F. et LOW F.E., Phys. Rev. 113, 1640 (1959).

CHINOWSKY W., GOLDHABER G., GOLDHABER S., LEE W. et O'HALLARAN T., Phys. Rev. Let. 9 330 (1962).

CHUNG S.U., DAHL O.I., HARDY L.M., KALBFLEISCH G.R., KIRZ J., MILLER D.H. et SMITH G.A., Phys. Rev. Let. 12, 621 (1964)

COHEN-TANNOUDJI G., (Voir Messiah) (1964).

COURANT H., FILTHUTH H., FRANZINI P., GLASSER R.G., MINGUZZI-RANZI A., SEGAR A., WILLIS W., BURNSTEIN R.A., DAY T.B., KEHOE B., HERZ A.J., SAKITT M., SECHI-ZORN B., SEEMAN N. et SNOW G.A., Phys. Rev. Let. 10, 409 (1963).

CRAMÉR H., The elements of probability theory and some of its applications. (Wiley, New York).

CRUSSARD J. (Voir Alitti) (1965).

DAHL O.I., (Voir Chung) (1964)

DALITZ R.H., Phil. Mag. 44, 1068 (1953).

DALITZ R.H., Properties of weak interactions (Ecole d'Eté, Varenna, 1964).

DAY T.B., (Voir Courant) (1963).

DELER B., (Voir Alitti, 1965).

DEVONS S. et GOLDFARB L.J.B., "Angular Correlations", dans Handbuch der Physik 42, 362 (1957).

.../...

DIRAC P.A.M., The principles of Quantum Mechanics, 4th edition (Oxford University Press, 1958).

DONCEL M.G. et de RAFAEL E., Tests of $SU(6)_W$ from predictions on spin alignments (Preprint, 1965)

DREITLEIN J. et PRIMAKOFF H., Phys. Rev. 125, 1671 (1962)

DRELL S.D. Phys. Rev. Letters 5, 342 (1960)

DRELL S.D. Rev. Mod. Phys. 33, 458 (1961)

DURAND III L., LANDOVITZ L.F. et LEITNER J., Phys. Rev. 112, 273 (1958).

DURAND III L., De CELLES P.C. et MARR R.B., Phys. Rev. 126, 1882 (1962).

DURAND III L. et CHIU Y.T., Phys. Rev. Let. 12, 399 (1964a).

DURAND III L. et CHIU Y.T., Phys. Rev. Let. 13, 45 (1964b).

DURAND III L. et CHIU Y.T., Phys. Rev. 137, B 1530 (1965).

EBERHARD P. et GOOD M.L., Phys. Rev. 120, 1442 (1960).

EDMONDS A.R., Angular momentum in quantum mechanics, (Princeton University Press, 1957).

ERNST F.J., SACHS R.G. et WALI K.C., Phys. Rev. 119, 1105 (1960)

FABRI E., Nu. Cim. 11, 479 (1954).

FANO U., Phys. Rev., 90, 577 (1952).

FANO U., Rev. Modern Phys. 29, 74 (1957)

FERRARI E. et SELLERI F., Suppl. Nu. Cim. 24, 453 (1962).

FERRO-LUZZI M., GEORGE R., GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y., HENRI V.P., JONGEJANS B., LEITH D., LYNCH G., MULLER F. et PERREAU J.M., Proc. Sienna Conf. on Elementary Particles, 1, 189(1963)

FERRO-LUZZI M., GEORGE R., GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y., HENRI V.P., JONGEJANS B., LEITH D., LYNCH G., MULLER F. et PERREAU J.M., The reaction KN $\pi\pi$ at 3 GeV/c and the production mechanism of K*N*, CERN preprint (1965).

FILTHUTH H., (Voir Courant) (1963).

FRANZINI P., (Voir Courant) (1963).

FRAUENFELDER H. et STEFFEN R.M., de GROOT S.R., TOLHOEK H.A., et HUISKAMP N.J., Angular distribution of nuclear radiation, dans $\alpha.\beta.\gamma.$ Ray Spectroscopy, Vol. 2 (North Holland P.C°).

... ...

FRETTER N.B., (Voir Huson) (1963).

GATTO R., (Voir Ademollo) (1964a).

GATTO R., (Voir Ademollo) (1964b).

GATTO R., (Voir Ademollo) (1965).

GELFAND N., (Voir Alff) (1965).

GELL-MANN M., Phys. Rev. 92, 833 (1953)

GELL-MANN M., California Inst. of Technology, Report N° CTSL-20(1961)

GELL-MANN M., Phys. Rev., 125, 1067 (1962).

GELL-MANN M., Rapport à la Conference d'Oxford, (1965).

GEORGE R., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

GEORGE R., (Voir Ferro-Luzzi) (1965).

GESSAROLI R., (Voir Alitti) (1965).

GINESTET J., (Voir Alitti) (1965).

GLASSER R.G., (Voir Courant) (1963).

GOEBEL C., Phys. Rev. Let. 1, 337, (1958).

GOLDFARB L.J.B., (Voir Devons) (1957).

GOLDHABER G., (Voir Chinowsky) (1962).

GOLDHABER G., BROWN J.L., GOLDHABER S., KADYK J.A., SHEN B.C. et TRILLING G.H., Phys. Rev. Let. 12, 336 (1964).

GOLDHABER S., (Voir Chinowsky) (1962).

GOLDHABER S., Proc. Athens Topical Conf. Recently discovered resonent particles, p. 92 (Ohio Univ., Athens) (1963).

GOLDHABER S., (Voir Goldhaber G.) (1964).

GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y., (Voir Ferro-Luzzi) (1965).

GOOD M.L., (Voir Eberhard) (1960).

GOTTFRIED K. et JACKSON J.D., Nu. Cim. 34, 735 (1964).

DE GROOT S.R., (Voir Frauenfelder) (1965).

.../...

GÜRSEY F., Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics, (Gordon and Breach, 1964).

GÜRSEY F. et RADICATI L.A., Phys. Rev. Let. 13, 173, (1965).

HARDY L.M., (Voir Chung) (1964).

HENDRICKS T., (Voir Lander) (1964).

HENRY C. et de RAFAEL E., Ann. Inst. Henri Poincaré 2, 87, (1965).

HENRY V.P., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

HENRY V.P., (Voir Ferro-Luzzi) (1965).

HERZ A.J., (Voir Courant) (1963).

HUISKAMP W.J. (Voir Frauenfelder) (1965).

HUSON F.R. et FRETTER W.B., Bull. Am. Phys. Soc. 8, 325 (1963).

ITZYKSON C., (Voir Bessis) (1963).

JACKSON J.D., (Voir Gottfried) (1964).

JACKSON J.D., Particle and polarization angular distributions for two and three body decays (Ecole d'Eté, Les Houches) (1965a).

JACKSON J.D. Cours à l'Ecole d'Eté des Houches (1965b).

JACOB M., (Voir Bessis) (1963).

JACOB M., (Voir Berman) (1965).

JONGEJANS B., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

JONGEJANS B., (Voir Ferro-Lussi) (1965).

JOOS H., Fortschritte der Physik 10, 65 (1962).

KADYK J.A., (Voir Goldhaber G.) (1964)

KALBFLEISCH G.R., (Voir Chung) (1964).

KÄLLEN G., "Properties of Vacuum expectation values of field operators", dans Relations de dispersion et particules élémentaires. (Hermann, Paris 1960)

KEHOE B., (Voir Courant) (1963).

.../...

KIRSCH L., (Voir Alff) (1965)

KIRZ J., (Voir Chung) (1964)

KIRZ J., (Voir Rosenfeld) (1965)

LANDER R.L., ABOLINS M., CARMONY D.D., HENDRICKS T., XUONG M. et YAGER P.
Phys. Rev. Letters 13, 346 (1964).

LANDOVITZ L.F., (Voir Durand III) (1958)

LEE T.D. et YANG C.N., Phys. Rev. 109, 1755 (1958).

LEE W., (Voir Chinowsky) (1962).

LEITH D., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

LEITH D., (Voir Ferro-Luzzi) (1965).

LEITNER J., (Voir Durand III).

LIPKIN H.J. et MESHKOV S., Phys. Rev. Let. 14, 670 (1965).

LOW F.E., (Voir Chew) (1959).

LUBANSKI J.K., Physica, 9, 310 (1942).

LURÇAT F. et MICHEL L., Nu. Cim. 21, 574 (1961) et
Comptes-Rendus de la Conf. d'Aix-en-Provence, p. 183.

LYNCH G., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

LYNCH G., (Voir Ferro-Luzzi) (1965).

MACFARLANE A.J., J. Math. Phys. 3, 1116 (1962).

MARR R.B., (Voir Durand III) (1962).

MESHKOV S., (Voir Lipkin) (1965).

MESSIAH A.M.L. et COHEN-TANNOUDJI G., Nu. Cim. 33, 853 (1964).

METROPOLIS N., (Voir Rotenberg) (1961).

MEYER Ph., PRENTKI J. et YAMAGUCHI Y., Phys. Rev. Let. 5, 442, (1960).

MICHEL L., Nu. Cim. 10, 319 (1953).

MICHEL L., Cours sur la théorie des groupes,
(Ecole d'été, Varenne, 1958)

.../...

MICHEL L., Suppl. Nu. Cim. 14, 95 (1959)

MICHEL L., (Voir Lurçat) (1961a).

MICHEL L., Nu. Cim. 22, 203 (1961b).

MICHEL L. et ROUHANINEJAD H., Phys. Rev. 122, 242 (1961c).

MICHEL L., Invariance in Quantum Mechanics and Group Extensions, Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics ; lectures of the Istanbul summer school of theoretical physics, (Edited by Feza Gürsey ; Gordon and Breach).

MILLER D.H., (Voir Chung) (1964).

MINGUZZI-RANZI A., (Voir Courant) (1963).

MINNAERT P., Positivity conditions for the density matrix of spin one particles, (Preprint)

MULLER F., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

MULLER F., (Voir Ferro-Luzzi) (1965).

NAIMARK M.A., Les représentations linéaires du groupe de Lorentz, (Dunod, Paris 1962).

NE'EMAN Y., Nuc. Phys. 26, 222, (1961).

NEVEU-RENE M., (Voir Alitti) (1965).

NISHIJIMA K., Prog. Theor. Phys. 12, 107 (1954).

NISHIJIMA K., Prog. Theor. Phys. 13, 285 (1955).

NUSSBAUM M., (Voir Alff) (1965).

NUYTS J. et de RAFAEL E., Nu. Cim. 30, 443 (1963).

O'HALLARAN T., (Voir Chinowsky) (1962).

PAULI W., (Voir Lubanski) (1942).

PERREAU J.M., (Voir Ferro-Luzzi) (1963).

PERREAU J.M., (Voir Ferro-Luzzi) (1965).

PESHKIN M., Phys. Rev. 123, 637 (1961).

PESHKIN M., Phys. Rev. 133, B 428 (1964).

... ...

PLANO R., (Voir Alff) (1965).

PRENTKI J., (Voir Meyer) (1960).

PREPARATA G., (Voir Ademollo) (1964b).

PREPARATA G., (Voir Ademollo) (1965).

PRIMAKOFF H., (Voir Dreitlin) (1962).

PRODELL A., (Voir Alff) (1965).

RADICATI L.A., (Voir Gürsey) (1965).

de RAFAEL E., Phys. Rev. 128, 2435 (1962).

de RAFAEL E., (Voir Nuyts) (1963).

de RAFAEL E., Nu. Cim. 33, 237 (1964a).

de RAFAEL E., Phys. Letters 11, 260 (1964b).

de RAFAEL E., (Voir Henry) (1965a).

de RAFAEL E., Implications of unitary symmetry on angular correlations, (non publié) (1965b)

de RAFAEL E., (Voir Doncel) (1965c).

ROMANO A., (Voir Alitti) (1965).

ROSS M.H. et SHAW G.L., Phys. Rev. Let. 12, 627 (1964).

ROSS M., (Voir Rosenfeld) (1965).

ROSENFELD A.H., BARBARO-GALTIERI A., BARKAS W.H., BASTIEN P.L., KIRZ J. et ROSS M., U.C.R.L. 80 30. August. (1965).

ROTENBERG M., BIVINS R., METROPOLIS N. et WOOTEN J.K., The 3-j and 6-j symbols (Techn. Press M.I.T.) (1961).

ROUHANINEJAD H., (Voir Michel) (1961).

SACHS R.G., (Voir Ernst) (1960)

SAKITA B. Phys. Rev. 136, B 1756 (1964).

SAKITT M., (Voir Courant) (1963).

SALZMAN F. et SALZMAN G., Phys. Rev. Let. 5, 377 (1960a).

SALZMAN F. et SALZMAN G., Phys. Rev. 120, 599 (1960b).

SCHLEIN P.E. et al., Phys. Rev. Let. 11, 167 (1963).

.../...

SCHULTZ J., (Voir Alff) (1965).

SECHI-ZORN B., (Voir Courant) (1963).

SEGAR A., (Voir Courant) (1963).

SELLERI F., (Voir Ferrari) (1962).

SHAPIRO G., Phys. Rev. 134, B 1393 (1964).

SHEN B.C., (Voir Goldhaber G.) (1964).

SEEMAN N., (Voir Courant) (1963).

SMITH G.A., (Voir Chung) (1964 a).

SNOW G.A., (Voir Courant) (1963).

SOPKOVICH N.J., Nu. Cim. 26, 186 (1962).

STEINBERGER J., (Voir Alff) (1965).

STEFFEN R.M., (Voir Frauenfelder) (1965).

STREATER R.F. et WIGHTMAN A.S., PCT, Spin and statistics, and all that, (W.A. Benjamin, Inc., 1964).

TOLHOEK H.A., (Voir Frauenfelder) (1965).

TRAN A.H., (Voir Alitti) (1965).

TRILLING G.H., (Voir Goldhaber G.) (1964).

TRIPP R., WATSON M. et FERRO-LUZZI M., Phys. Rev. Let. 8, 175 (1962).

TRIPP R., Ann. Rev. Nuc. Science 15, 325 (1965).

WAERDEEN B.L. van der, Die gruppentheoretische methode in der quantenmechanik (Springer, Berlin 1932).

WALI K.C., (Voir Ernst) (1960)

WATSON M., (Voir Tripp) (1962).

WATSON H.D.D., Nu. Cim. 29, 1338 (1963).

WEINBERG S., Phys. Rev. 133, B1318 (1964).

WICK G.L., Symmetries in Quantum Mechanics, (Cours à l'école d'été des Houches, 1965).

WIGHTMAN A.S., L'invariance dans la mécanique quantique relativiste, dans Relations de dispersion et particules élémentaires, (Hermann, Paris 1960).

... ...

WIGHTMAN A.S., (Voir Streater) (1964).

WIGNER E.P., Ann. Math. 40, 149 (1939).

WIGNER E.P., (Voir Bargmann) (1948).

WIGNER E.P., Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra, (Academic Press, New-York 1959).

WIGNER E.P., Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group including reflections (Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics ; Lectures of the Istanbul Summer school of theoretical physics; edited by Feza Gursey, Gordon and Breach 1964

WILLIAMS D.N., (Communication privée 1964).

WILLIS W., (Voir Courant) (1963).

WOLTERS G.F., A study of resonances in view of spin determination. (Thèse, Drukkerij Holland, N.V., Amsterdam 1964).

WOOTEN J.K., (Voir Rotenberg) (1961).

XUONG M., (Voir Lander) (1964).

YAGER P.M., (Voir Lander) (1964).

YAMAGOUCHI Y., (Voir Meyer) (1960).

YANG C.N., (Voir Lee) (1958).

YANG C.N., (Voir Byers) (1964).

ZEEMAN E.C., J. Math. Phys. 5, 490 (1964).

ZEMACH C., Phys. Rev. 140, B 109 (1965).

ZWANZIGER D., Positive-definite and covariant spin-1 polarization matrix. (Lorentz Symposium, Boulder 1964).

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Sur l'existence des courants leptoniques neutres

Vu et approuvé
Orsay, le 28 Février 1966
Le Doyen de la Faculté des Sciences
J. BERGERARD

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Paris
J. ROCHE